Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática y Estadística

TEMUCO, Agosto 8 de 2013

Resolución Guía de Trabajo. Geometría Analítica.

Fundamentos de Matemáticas.

Profesores: P. Valenzuela - A. Sepúlveda - A. Parra - L. Sandoval - J. Molina - E. Milman - M. Choquehuanca - H. Soto - E. Henríquez.
Ayudante: Pablo Atuán.

1 La Recta.

1. Hallar la ecuación de la recta que satisface:

   (a) Pasa por el punto $(-3, 1)$ y es paralela a la recta determinada por los dos puntos $(0, -2)$ y $(5, 2)$.

   Solución: Sabemos que dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales. Tenemos que $m = \dfrac{2-(-2)}{5-0} = \dfrac{4}{5}$. Luego, determinamos la ecuación de la recta utilizando la fórmula "*Punto - Pendiente*" como sigue:

$$\begin{aligned} y-1 &= \frac{4}{5}\cdot(x-(-3)) \\ y-1 &= \frac{4}{5}\cdot x + \frac{12}{5} \\ y &= \frac{4}{5}\cdot x + \frac{17}{5} \end{aligned}$$

   (b) Pasa por el punto $A(1, 5)$ y tiene pendiente 2.

   Solución: Determinamos nuestra recta con la ecuación "*Punto - Pendiente*" como sigue:

$$\begin{aligned} y-5 &= 2\cdot(x-1) \\ y-5 &= 2x-2 \\ y &= 2x+3 \end{aligned}$$

   (c) Pasa por los puntos $A(5, -3)$ y $B(-7, 5)$.

   Solución: Determinamos nuestra recta dado dos puntos que pasan por ella como sigue:

$$\begin{aligned} y-5 &= \frac{5-(-3)}{-7-5}\cdot(x-(-7)) \\ y-5 &= -\frac{2}{3}\cdot(x+7) \\ y-5 &= -\frac{2}{3}\cdot x - \frac{14}{3} \\ y &= -\frac{2}{3}\cdot x + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(d) Tiene pendiente -3 e intersección con el eje y igual -2.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$ Sabemos que la recta pasa por el punto $(0,-2)$, determinamos nuestra ecuación de la recta utilizando la ecuación "*Punto - Pendiente*" como sigue:

$$\begin{aligned} y-(-2) &= -3\cdot(x-0) \\ y+2 &= -3x \\ y &= -3x-2 \end{aligned}$$

(e) Tiene pendiente -4 y pasa por la intersección de las rectas $2x+y-8=0$ y $3x-2y+9=0$.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$ Resolviéndo el sistema de ecuaciones tenemos que la intersección entre las rectas $2x+y-8=0$ y $3x-2y+9=0$ es el punto $(1,6)$. Ahora, determinamos la ecuación de la recta con la fórmula "*Punto - Pendiente*" como sigue:

$$\begin{aligned} y-6 &= -4\cdot(x-1) \\ y-6 &= -4x+4 \\ y &= -4x+10 \end{aligned}$$

(f) Es perpendicular a la recta $3x-4y+11=0$ y pasa por el punto $(-1,-3)$.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$ Tenemos que la pendiente de la recta $3x-4y+11=0$ es $\frac{3}{4}$. Como las rectas son perpendiculares, sabemos que el producto de sus pendientes es igual a -1, por lo tanto, la pendiente de nuestra recta buscada es $-\frac{4}{3}$. Determinamos la ecuación de la recta con la fórmula "*Punto - Pendiente*" como sigue:

$$\begin{aligned} y-(-3) &= -\frac{4}{3}\cdot(x-(-1)) \\ y+3 &= -\frac{4}{3}\cdot(x+1) \\ y+3 &= -\frac{4}{3}\cdot x-\frac{4}{3} \\ y &= -\frac{4}{3}\cdot x-\frac{13}{3} \end{aligned}$$

(g) Pasa por el punto $(3,1)$ y tal que la distancia de esta recta al punto $(-1,1)$ sea igual a $2\sqrt{2}$.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$ Sea $y=mx+n$ la recta pedida, o en su defecto $mx-y+n=0$. Como la recta pasa por el punto $(3,1)$ entonces se cumple que $3m-1+n=0\rightarrow n-1=-3m$. Utilizando la fórmula "Distancia Punto - Recta" tenemos que:

$$\begin{aligned} d[(-1,1):mx-y+n=0] &= \frac{|-m-1+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} \\ 2\sqrt{2} &= \frac{|n-1-m|}{\sqrt{m^2+1}} \end{aligned}$$

Resolviéndo el sistema de ecuaciones tenemos que $m=1, n=-2$ o $m=-1, n=4$. Por lo tanto las posibles soluciones son $y=x-2$, $y=-x+4$.

(h) Pasa por el punto $A(-6,7)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a $\frac{21}{2}$.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$ Sea $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ la ecuación de la recta segmentada pedida. Al reemplazar el punto $(-6,7)$, tenemos la relación $7a-6b=1$. Por otra parte, tenemos que $a\cdot b=21$. Resolviéndo el sistema de ecuaciones, llegamos a las soluciones $7x+12y=42$ o $7x+3y=-21$.

(i) Es paralela a la recta $5x+12y-2=0$ y dista en 4 unidades de ella.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$ Sea $y=mx+n$ o en su defecto $mx-y+n=0$ la recta pedida. Como la recta es paralela a $5x+12y-2=0$ tenemos que $m=\frac{-5}{12}$. Tomamos un punto cualquiera de la recta $5x+12y-2=0$ como por ejemplo $\left(0,\frac{1}{6}\right)$. Utilizando la fórmula "Distancia Punto - Recta" tenemos que:

$$\begin{aligned}
d\left[\left(0,\frac{1}{6}\right):\frac{5x}{12}-y+n=0\right] &= 4\\
\frac{\left|n-\frac{1}{6}\right|}{\sqrt{(\left(\frac{5}{12}\right)^2)+(-1)^2}} &= 4\\
\left|n-\frac{1}{6}\right| &= \frac{13}{3}\\
n=\frac{9}{2} &\vee n=\frac{-25}{6}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las posibles soluciones son $y=\frac{-5}{12}\cdot x+\frac{9}{2}$, $y=\frac{-5}{12}\cdot x-\frac{25}{6}$.

(j) Pasa por el punto $(2,-1)$ y que forma un ángulo de 45° con la recta $2x-3y+7=0$.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$ Sea $y=mx+n$ la recta pedida. Como la recta pasa por el punto $(2,-1)$, se cumple que $2m+n=-1$. Utilizando la fórmula "Ángulo comprendido entre dos rectas" tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{m-\frac{2}{3}}{1+\frac{2m}{3}} &= \tan 45^\circ\\
m-\frac{2}{3} &= 1+\frac{2m}{3}\\
m &= 5
\end{aligned}$$

Luego, $n=-11$. Por lo tanto, la recta pedida es $y=5x-11$.

2. Hallar el valor de k para que la recta de ecuación $kx+(k-1)y-18=0$ sea paralela a la recta $4x+3y+7=0$.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$ Para que la recta $kx+(k-1)y-18=0$ sea paralela a la recta $4x+3y+7=0$. Deben tener la misma pendiente, igualando las pendientes de ambas rectas, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{-k}{k-1} &= \frac{-4}{3}\\
\frac{k}{k-1} &= \frac{4}{3}\\
3k &= 4k-4\\
k &= 4.
\end{aligned}$$

3. Hallar el valor de k para que la recta de ecuación $k^2x + (k+1)y + 3 = 0$ sea paralela a la recta $3x - 2y - 11 = 0$.

Solución: Para que la recta $k^2x + (k+1)y + 3 = 0$ sea paralela a la recta $3x - 2y - 11 = 0$. Deben tener la misma pendiente, igualando las pendientes de ambas rectas, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{-k^2}{k+1} &= \frac{3}{2} \\ -2k^2 &= 3k+3 \\ 2k^2 + 3k + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Como $\triangle = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 < 0$, entonces no existe $k \in \mathbb{R}$ que cumpla tal condición.

4. En las ecuaciones $ax + (2-b)y - 23 = 0$ y $(a-1)x + by + 15 = 0$, hallar los valores de a y b para que representen rectas que pasen por el punto $(2, -3)$.

Solución: Reemplazando el punto $(2,-3)$ en ambas rectas tenemos que $2a + 3b = 29$ y $2a - 3b = -13$. Resolviéndo el sistema de ecuaciones tenemos que $a = 4$ y $b = 7$.

5. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas $4x - 9y + 11 = 0$ y $3x + 2y - 7 = 0$.

Solución: Tenemos que $m_1 = \frac{4}{9}$ y $m_2 = \frac{-3}{2}$. Utilizando la fórmula "Angulo comprendido entre dos rectas", tenemos que $\alpha = 80.27°$

6. Hallar la distancia de la recta $4x - 5y + 10 = 0$ al punto $P(2, -3)$.

Solución: Utilizando la fórmula "Distancia Punto - Recta" tenemos que:

$$\begin{aligned} d[(2,-3) : 4x - 5y + 10 = 0] &= \frac{|4 \cdot 2 - 5 \cdot -3 + 10|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2}} \\ &= \frac{33}{\sqrt{41}} \\ &= \frac{33\sqrt{41}}{41} \end{aligned}$$

7. Hallar la distancia entre las rectas paralelas $3x - 4y + 8 = 0$ y $6x - 8y + 9 = 0$.

Solución: Tomando un punto cualquiera que pase por la recta $3x - 4y + 8 = 0$, como por ejemplo el punto $(0, 2)$. Utilizando la fórmula "Distancia Punto - Recta" tenemos que:

$$\begin{aligned} d[(0,2) : 6x - 8y + 9 = 0] &= \frac{|6 \cdot 0 - 8 \cdot 2 + 9|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} \\ &= \frac{7}{10} \end{aligned}$$

8. La distancia de la recta $2x - 5y + 10 = 0$ al punto P es 3, si la abscisa de P es 2. Hallar la ordenada de P.

Solución: Sea P un punto de la forma $(2, a)$ donde a es la ordenada del punto P. Utilizando la fórmula "Distancia Punto - Recta" tenemos que:

$$
\begin{aligned}
d[(2,a): 2x-5y+10=0] &= 3\\
\frac{|2\cdot 2-5\cdot a+10|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}} &= 3\\
\frac{|14-5a|}{\sqrt{29}} &= 3\\
|14-5a| &= 3\sqrt{29}
\end{aligned}
$$

De donde se concluye que $a = \dfrac{14\pm 3\sqrt{29}}{5}$.

9. La distancia de la recta $4x-3y+1=0$ al punto P es 4. Si la ordenada de P es 3, Hallar su abscisa.

   Solución: Sea P un punto de la forma $(a,3)$ donde a es la abscisa del punto P. Utilizando la fórmula "Distancia Punto - Recta" tenemos que:

$$
\begin{aligned}
d[(a,3): 4x-3y+1=0] &= 4\\
\frac{|4\cdot a-3\cdot 3+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} &= 4\\
\frac{|4a-8|}{5} &= 4\\
|4a-8| &= 20
\end{aligned}
$$

   De donde se concluye que $a=7 \vee a=-3$.

10. En la ecuación $kx+3y+5=0$, Hallar el valor del coeficiente k de manera que la distancia de la recta que representa al punto $(2,-2)$ sea igual a 1.

    Solución: Utilizando la fórmula de "Distancia Punto - Recta" tenemos que:

$$
\begin{aligned}
d[(2,-2): kx+3y+5=0] &= 1\\
\frac{|k\cdot 2+3\cdot -2+5|}{\sqrt{k^2+(3)^2}} &= 1\\
\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+9}} &= 1\\
|2k-1| &= \sqrt{k^2+9}\\
4k^2-4k+1 &= k^2+9\\
3k^2-4k-8 &= 0\\
k &= \frac{2\pm 2\sqrt{7}}{3}
\end{aligned}
$$

11. Determinar el valor del parámetro k de manera que la recta de la familia $kx-y+8=0$ que le corresponda pasar por el punto $(-2,4)$. Hallar la ecuación de la recta.

    Solución: Reemplazando el punto $(-2,4)$ en la ecuación de la recta, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
-2k-4+8 &= 0\\
-2k+4 &= 0\\
2k &= 4\\
k &= 2
\end{aligned}
$$

    Luego la ecuación de la recta es $2x-y+8=0$.

12. Determinar el valor del parámetro k de manera que la recta de la familia $3x - ky - 7 = 0$ que le corresponda sea perpendicular a la recta $7x+4y-11 = 0$. Hallando el parámetro, escriba la ecuación de la recta.

Solución: Sabemos que dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1. La pendiente de la recta $3x - ky - 7 = 0$ es $3/k$ y la pendiente de la recta $7x + 4y - 11 = 0$ es $-7/4$. Luego que se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \frac{3}{k} \cdot -\frac{7}{4} &= -1 \\ \frac{-21}{4k} &= -1 \\ 4k &= 21 \\ k &= \frac{21}{4} \end{aligned}$$

Luego, la ecuación de la recta es $12x - 21y - 28 = 0$.

13. La distancia de una recta al origen es 3. La recta pasa por el punto $(3\sqrt{5}, -3)$. Hallar su ecuación.

Solución: Sea $y = mx + n$ o en su defecto $mx - y + n = 0$ la recta pedida. Utilizando la fórmula "Distancia Punto - Recta" tenemos que:

$$\begin{aligned} d[(0,0) : mx - y + n = 0] &= 3 \\ \frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}} &= 3 \\ n^2 &= 9m^2 + 9 \end{aligned}$$

Como la recta pasa por el punto $(3\sqrt{5}, -3)$, se cumple que $3\sqrt{5}m + 3 + n = 0$. Resolviéndo el sistema de ecuaciones llegamos a las dos soluciones $y = -3$ o $y = -\frac{\sqrt{5}x}{2} + \frac{9}{2}$.

14. La suma de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es igual a 10. Hallar la ecuación de la recta si forma con los ejes coordenados un triángulo de área 12.

Solución: Sea $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ la ecuación de la recta segmentada, donde a es la intersección con el eje x y b es la intersección con el eje y. Tenemos que $a + b = 10$ y $\frac{a \cdot b}{2} = 12$. Resolviéndo el sistema de ecuaciones, tenemos dos soluciones $a = 6, b = 4$ o $a = 4, b = 6$. Luego, las posibles ecuaciones de recta son $6x + 4y = 24$ o $4x + 6y = 24$.

15. Una recta pasa por el punto de intersección de las rectas $2x - 3y - 5 = 0$ y $x + 2y - 13 = 0$ y el segmento que determina sobre el eje x es igual al doble de su pendiente. Hallar la ecuación de dicha recta.

Solución: Sea $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ la ecuación de la recta pedida. Tenemos que la recta pasa por el punto $(7, 3)$, por lo tanto, se cumple que $\frac{7}{a} + \frac{3}{b} = 1$. Por otra parte, se cumple que $a^2 + 2b = 0$. Resolviéndo el sistema de ecuaciones, tenemos las soluciones $x - 2y - 1 = 0$ o $3x - y - 18 = 0$.

16. Encuentre las rectas que pasan por el punto de intersección de $7x + 7y = 24$ con $x - y = 0$ y forman con los ejes coordenados un triángulo de área $\frac{36}{5}$

Solución: Resolviéndo el sistema de ecuaciones, tenemos que nuestra recta pasa por el punto $\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right)$. Sea $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ la ecuación segmentada de la recta. Reemplazando el punto $\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right)$ en la recta tenemos que $\frac{12}{7a} + \frac{12}{7b} = 1$. Por otra parte, tenemos que $\frac{a \cdot b}{2} = \frac{36}{5}$, es decir $a \cdot b = \frac{72}{5}$. Resolviéndo el sistema de ecuaciones, llegamos a las soluciones $5x + 2y = 12$ o $2x + 5y = 12$.

17. Un triángulo tiene sus vértices en $A = (1, -2)$, $B = (2, 3)$ y el vértice C se halla en la recta de ecuación $2x + y = 2$. Determine las coordenadas de C si el área del triángulo es 8.

$\boxed{\textbf{Solución:}}$ La recta que pasa por los puntos $(1, -2)$ y $(2, 3)$ es $5x - y - 7 = 0$. Sea $C(a, b)$ el punto buscado. De la relación $\dfrac{d[(-1, 2) : (2, 3)] \cdot d[(a, b) : 5x - y - 7 = 0]}{2} = 8$ llegamos a $|5a - b - 7| = 16$. Por otra parte, tenemos que $b = 2 - 2a$. Resolviéndo el sistema de ecuaciones, llegamos a las soluciones: $C\left(\dfrac{25}{7}, -\dfrac{36}{7}\right)$ o $C(-1, 4)$.