Universidad de la Frontera
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática y Estadística

TEMUCO, Agosto 8 de 2013

Resolución Guía de Trabajo. Geometría Analítica.

Fundamentos de Matemáticas.

Profesores: P. Valenzuela - A. Sepúlveda - A. Parra - L. Sandoval - J. Molina - E. Milman - M. Choquehuanca - H. Soto - E. Henríquez.
Ayudante: Pablo Atuán.

1 Hipérbola.

1. **Solución:** *"Estos ejercicios quedan propuestos para el estudiante"*

2. **Solución:** Tenemos que:

$$\begin{aligned} 2a &= d[V_1 : V_2] \\ 2a &= d[(0,3) : (0,-3)] \\ 2a &= 6 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2c &= d[F_1 : F_2] \\ 2c &= d[(0,5) : (0,-5)] \\ 2c &= 10 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

Luego, $b = 4$. Además, $C(0,0)$. Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

Longitud eje transverso igual a 6, longitud eje conjugado igual a 8. Longitud del lado recto igual a $\frac{32}{3}$. Su excentricidad es $\frac{5}{3}$

3. **Solución:** Tenemos que:

$$\begin{aligned} 2a &= d[V_1 : V_2] \\ 2a &= d[(2,0) : (-2,0)] \\ 2a &= 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2c &= d[F_1 : F_2] \\ 2c &= d[(3,0) : (-3,0)] \\ 2c &= 6 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Luego, $b = \sqrt{5}$. Además, $C(0,0)$. Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

Su excentricidad es $\frac{3}{2}$.

4. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Tenemos que $c = 5$, luego $a = \dfrac{5}{3}$. Por lo tanto $b = \dfrac{10\sqrt{2}}{2}$. Luego, la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{y^2}{\frac{25}{9}} - \frac{x^2}{\frac{200}{9}} = 1$$

Donde, la longitud del lado recto es $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2 \cdot \frac{200}{9}}{\frac{5}{3}} = \dfrac{80}{3}$

5. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Tenemos que $2b = 6$, es decir, $b = 3$. Como $\dfrac{2b^2}{a} = 6$, tenemos que $a = 3$. Por lo tanto, $c = 3\sqrt{2}$. Luego, la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Su excentricidad es $\sqrt{2}$.

6. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Tenemos que:

$$\begin{aligned} 2a &= d[V_1 : V_2] \\ 2a &= d[(0,4) : (0,-4)] \\ 2a &= 8 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

Como $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2}$, tenemos que 6. Por lo tanto, $b = 2\sqrt{5}$. Además, $C(0,0)$. Luego, la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$$

Las coordenadas de los focos son $F_1(0,6)$ y $F_2(0,-6)$.

7. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Sea $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ la ecuación buscada. Como $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, tenemos que $c = \dfrac{\sqrt{6}a}{2}$. Tomando la relación, $a^2 + b^2 = c^2$ llegamos a que $a^2 = 2b^2$ Reemplazando el punto $(2,1)$ en nuestra ecuación, concluímos que $b = 1$, por ende, $a = \sqrt{2}$ y $c = \sqrt{3}$. Luego, la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1$$

8. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Sea $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ la ecuación buscada. Como $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2}{3}$, tenemos que $b^2 = \frac{a}{3}$. Reemplazando el punto $(-1,2)$ en la ecuación, llegamos a la relación $4b^2 - a^2 = a^2b^2$. De donde, concluímos que $a = 1$, $b = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Luego, la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{3} = 1$$

9. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Sea $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ la ecuación buscada. Reemplazando los puntos $(3, -2)$ y $(7, 6)$ en la ecuación y resolviéndo el sistema de ecuaciones, concluímos que $a = 2$ y $b = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. Luego, la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{5y^2}{16} = 1$$

10. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Sea $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ la ecuación buscada. Reemplazando el punto $(6, 2)$ en la ecuación, llegamos a la relación $36b^2 - 4a^2 = a^2b^2$. Como la recta $2x - 5y = 0$ es la ecuación de la asíntota de la hipérbola, tenemos que $b = \dfrac{2a}{5}$. Resolviéndo el sistema de ecuaciones, tenemos que $a = \sqrt{11}$ y $b = \dfrac{2\sqrt{11}}{5}$. Luego, la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{x^2}{11} - \frac{25y^2}{44} = 1$$

11. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Tenemos que $a = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$, $b = \dfrac{\sqrt{35}}{5}$. La ecuación de las asíntotas es: $y = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \cdot x$

12. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Tenemos que $a = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$, $b = \dfrac{\sqrt{11}}{3}$, luego la ecuación de las asíntotas de la hiperbola son: $y = \pm\dfrac{2}{3} \cdot x$. Resolviéndo el sistema de ecuaciones, llegamos a que las intersecciones son los puntos $(3, 2)$ y $(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{9})$.

13. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Sea $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ la ecuación de la hipérbola pedida. Reemplazando el punto $(3, -1)$ en la ecuación, llegamos a la relación $9b^2 - a^2 = a^2b^2$. Por otra parte, tenemos que $\dfrac{b}{a} = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Resolviéndo el sistema de ecuaciones, llegamos a la solución:

$$\frac{2x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1$$

14. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Sea $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2}$ la ecuación de la hipérbola pedida. Reemplazando el punto $(2, 3)$ en la ecuación, llegamos a la relación $9b^2 - 4a^2 = a^2b^2$. Por otra parte, tenemos que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. Resolviéndo el sistema de ecuaciones, llegamos a la solución:

$$\frac{7x^2}{47} - \frac{4y^2}{47} = 1$$

15. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ De la relación $2a = d[V_1 : V_2]$, tenemos que $a = 2$. Por otra parte, tenemos que el centro (h, k) de la hipérbola es el punto $(1, 3)$. Como $\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2}$, tenemos que $c = 3$, por lo tanto, $b = \sqrt{5}$. Luego la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$$

Donde $F_1(4, 3), F_2(-2, 3)$. Longitud del eje transverso igual 4. Longitud del eje conjugado igual a $2\sqrt{5}$. Longitud del lado recto igual a 5.

16. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ De la relación $2a = d[V_1 : V_2]$, tenemos que $a = 3$. Por otra parte, tenemos que el centro (h, k) de la hipérbola es el punto $(-2, -1)$. Como $\dfrac{2b^2}{a} = 2$, tenemos que $b = \sqrt{3}$, por lo tanto $c = 2\sqrt{3}$. Luego la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{3} = 1$$

Donde $F_1(-2, -1+2\sqrt{3}), F_2(-2, -1-2\sqrt{3})$. Su excentricidad es $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

17. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ De la relación $a = d[C : V_2]$, tenemos que $a = 2$. Por otra parte, de $\dfrac{2b^2}{a} = 8$, tenemos que $b = 2\sqrt{2}$. Por lo tanto, $c = 2\sqrt{3}$. Luego la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{8} = 1$$

Donde la longitud del eje conjugado igual a $4\sqrt{2}$. Su excentricidad es $\sqrt{3}$.

18. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ De la relación $2c = d[F_1 : F_2]$, tenemos que $c = 3$. Además $a = 2$. Por lo tanto, $b = \sqrt{5}$. Por otra parte, tenemos que el centro (h, k) de la hipérbola es el punto $(4, -5)$. Luego la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{(y+5)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{5} = 1$$

Donde la longitud del lado recto es igual a 5. Su excentricidad es $\dfrac{3}{2}$.

19. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ De la relación $d[C : F_1]$, tenemos que $c = 4$. Como $\dfrac{c}{a} = 2$, tenemos que: $a = 2$. Por lo tanto, $2\sqrt{3}$. Luego la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{12} = 1$$

Donde la longitud del eje tranverso es igual a 4, la longitud del eje conjugado es $4\sqrt{3}$.

20. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ De la relación $2a = d[V_1 : V_2]$. Además $b = 3$. Por lo tanto, $c = \sqrt{13}$. Tenemos que el centro (h, k) de la hipérbola es el punto $(-3, 0)$. Luego la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

Donde $F_1(-3, \sqrt{13})$, $F_2(-3, -\sqrt{13})$. Su excentricidad es $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

21. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ De las asíntotas de la hipérbola tenemos que el centro de la hipérbola es el punto (h, k) es el punto $(1, 1)$ y la relación $b = 2a$. Reemplazando el punto $(4, 6)$ en la ecuación de la hipérbola, tenemos que $a = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$ y $b = \sqrt{11}$. Luego la ecuación de la hipérbola queda determinada por:

$$\frac{4(x-1)^2}{11} - \frac{(y-1)^2}{11} = 1$$