Universidad de la Frontera

Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemática y Estadística

TEMUCO, Agosto 8 de 2013

Resolución Guía de Trabajo. Geometría Analítica.

Fundamentos de Matemáticas.

Profesores: P. Valenzuela - A. Sepúlveda - A. Parra - L. Sandoval - J. Molina - E. Milman - M. Choquehuanca - H. Soto - E. Henríquez.

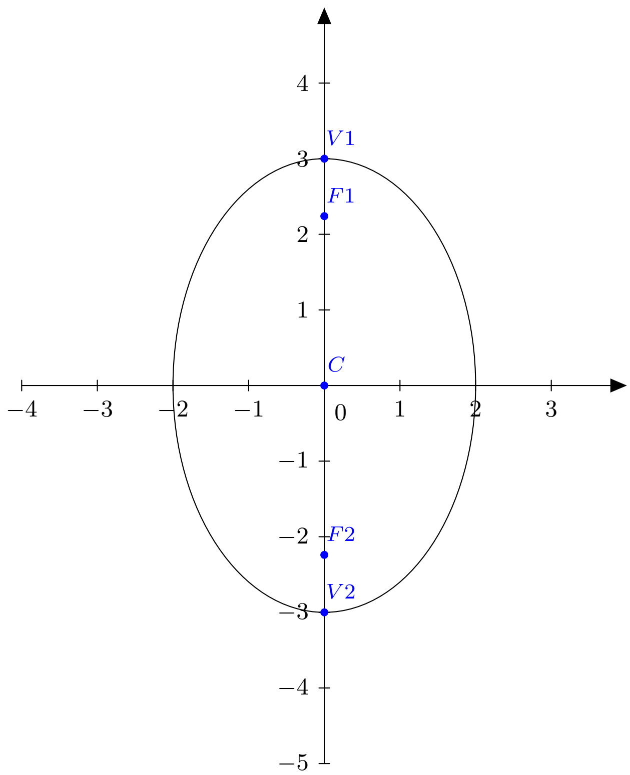
Ayudante: Pablo Atuán.

1 Elipse.

1. **Representar gráficamente y determinar las coordenadas de los focos, de los vértices y la excentricidad de las siguientes elipses.**

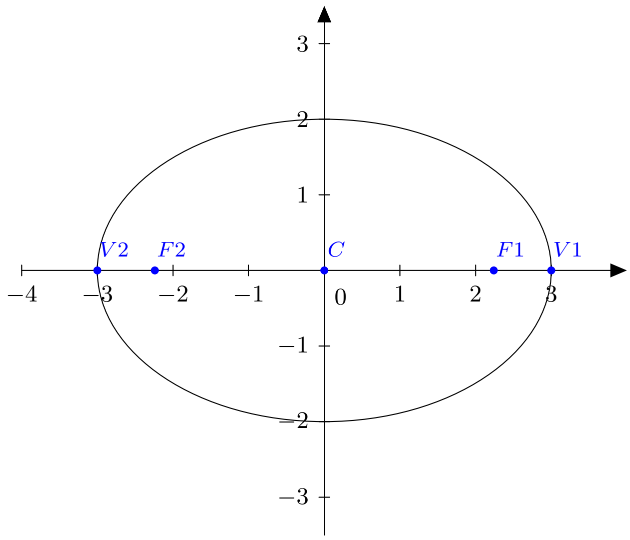
- $9x^2 + 4y^2 = 36 \rightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \rightarrow \dfrac{(x-0)^2}{2^2} + \dfrac{(y-0)^2}{3^2} = 1$

  Tenemos que el centro de la elipse es $(0,0)$. Lado mayor de longitud 3 y lado menor de longitud 2. Es decir, $a = 3$, $b = 2$, por lo tanto $c = \sqrt{5}$. Luego, las coordenadas de los focos son $F_1(0,\sqrt{5})$ y $F_2(0,-\sqrt{5})$. Las coordenadas de los vértices son $V_1(0,3)$ y $V_2(0,-3)$. Su excentricidad es $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. El gráfico es el siguiente:



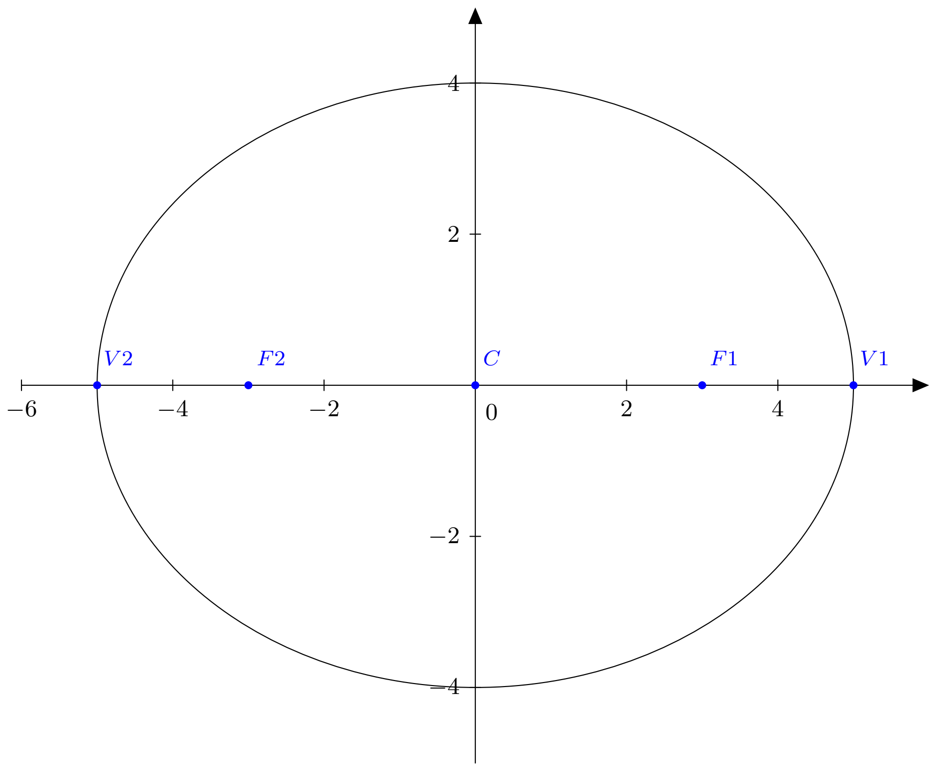
- $4x^2 + 9y^2 = 36 \rightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \rightarrow \dfrac{(x-0)^2}{3^2} + \dfrac{(y-0)^2}{2^2} = 1$

  Tenemos que el centro de la elipse es $(0,0)$. Lado mayor de longitud 3 y lado menor de longitud 2. Es decir, $a = 3$, $b = 2$, por lo tanto $c = \sqrt{5}$. Luego, las coordenadas de los focos son $F_1(\sqrt{5}, 0)$ y $F_2(-\sqrt{5}, 0)$. Las coordenadas de los vértices son $V_1(3,0)$ y $V_2(-3,0)$. Su excentricidad es $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. El gráfico es el siguiente:



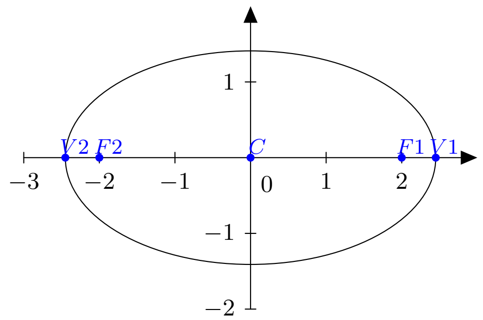
- $16x^2 + 25y^2 = 400 \rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \rightarrow \dfrac{(x-0)^2}{25} + \dfrac{(y-0)^2}{16} = 1$

  Tenemos que el centro de la elipse es $(0,0)$. Lado mayor de longitud 5 y lado menor de longitud 4. Es decir, $a = 5$, $b = 4$, por lo tanto $c = 3$. Luego, las coordenadas de los focos son $F_1(3,0)$ y $F_2(-3,0)$. Las coordenadas de los vértices son $V_1(5,0)$ y $V_2(-5,0)$. Su excentricidad es $\dfrac{3}{5}$. El gráfico es el siguiente:



- $x^2 + 3y^2 = 6 \to \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \to \dfrac{(x-0)^2}{(\sqrt{6})^2} + \dfrac{(y-0)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$

  Tenemos que el centro de la elipse es $(0,0)$. Lado mayor de longitud $\sqrt{6}$ y lado menor de longitud $\sqrt{2}$. Es decir, $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$, por lo tanto $c = 2$. Luego, las coordenadas de los focos son $F_1(2,0)$ y $F_2(-2,0)$. Las coordenadas de los vértices son $V_1(\sqrt{6},0)$ y $V_2(-\sqrt{6},0)$. Su excentricidad es $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. El gráfico es el siguiente:



"Los demás gráficos quedan para el estudiante"

2. **Solución:** Como el foco es el punto $(0,3)$, se sigue que $c = 3$. Por otra parte, tenemos que $e = \dfrac{c}{a}$, luego $a = 6$. Por lo tanto, $b = 3\sqrt{3}$. Luego, la ecuación de la elipse queda determinada por:

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$$

3. **Solución:** Tenemos que $a = 4$ y $c = 3$, por lo tanto $b = \sqrt{7}$. Luego, la ecuación de la elipse queda determinada por:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

4. **Solución:** Tenemos que $a = 6$ y $c = 4$, por lo tanto $b = 2\sqrt{5}$. Luego, la ecuación de la elipse queda determinada por:

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$$

5. **Solución:** Tenemos que $c = 2$ y $e = \dfrac{2}{3}$, por lo tanto $a = 3$. Se sigue que $b = \sqrt{5}$. Luego, la ecuación de la elipse queda determinada por:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

6. **Solución:** Tenemos que $c = 3$ y $\dfrac{2b^2}{a} = 9$, por lo tanto $b^2 = \dfrac{9a}{2}$. Tomando la relación $a^2 = b^2 + c^2$ tenemos que:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{9a}{2} + 9 \\ 2a^2 &= 9a + 18 \\ 2a^2 - 9a - 18 &= 0 \\ (2a+3)(a-6) &= 0 \end{aligned}$$

Como $a > 0$, se tiene que $a = 6$. Por lo tanto $b = 3\sqrt{3}$. Luego, la ecuación de la elipse queda determinada por:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$$

7. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Sea $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ la ecuación de la elipse pedida. Reemplazando los puntos $(\sqrt{6},-1)$ y $(2,\sqrt{2})$, llegamos a la solución:

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$$

8. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Tenemos que $2a=4b$, es decir $a=2b$. Como pasa por el origen, tenemos que la ecuación de la elipse es de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} &= 1\\ \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{4b^2} &= 1\\ 4x^2+y^2 &= 4b^2\end{aligned}$$

Como la elipse pasa por el punto $(\dfrac{\sqrt{7}}{2},3)$ tenemos que $b=2$. Luego $a=4$. Luego, la ecuación de la elipse queda determinada por:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

9. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Tenemos que:

$$\begin{aligned}2a &= d[(-3,7):(-3,-1)]\\ 2a &= 8\\ a &= 4\end{aligned}$$

Como $\dfrac{2b^2}{a}=2$, se sigue que $b=2$, por lo tanto $c=2\sqrt{3}$. El centro de la elipse corresponde al punto medio de los vértices, luego el centro es $(-3,3)$. Luego, la ecuación de la elipse queda determinada por:

$$\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$$

Donde, las coordenadas de los focos son $F_1(-3,3+2\sqrt{3})$ y $F_2(-3,3-2\sqrt{3})$. Longitud del eje mayor igual a 8, longitud del eje menor igual a 4. Su excentricidad es $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

10. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Completando cuadrados tenemos que la ecuación de la elipse queda determinada por:

$$\frac{(x+1)^2}{2^2}+\frac{(y-\frac{3}{2})^2}{1^2}=1$$

Tenemos que el centro de la elipse es $(-1,\frac{3}{2})$. Las coordenadas de los focos son $F_1(-1+\sqrt{3},\frac{3}{2})$ y $F_2(-1-\sqrt{3},\frac{3}{2})$. Las coordenadas de los vértices son $V_1(1,\frac{3}{2})$ y $V_2(-3,\frac{3}{2})$. Longitud del eje mayor igual a 4, longitud del eje menor igual a 2. Longitud del lado recto igual a 1. Su excentricidad es $\dfrac{1}{3}$.

11. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Tenemos que:

$$\begin{aligned} 2a &= d[(1,1):(7,1)] \\ 2a &= 6 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Como $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{3}$. Tenemos que $c = 1$. Por lo tanto $b = 2\sqrt{2}$. El centro de la elipse corresponde al punto medio de los vértices, luego el centro es el punto $(4,1)$. Luego, la ecuación de la elipse queda determinada por:

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$$

Las coordenadas de los focos son $F_1(5,1)$ y $F_2(3,1)$. Longitud del eje mayor igual a 6, longitud del eje menor igual a $4\sqrt{2}$. Longitud del lado recto igual a $\frac{16}{3}$.

12. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Tenemos que:

$$\begin{aligned} 2a &= d[(-4,-2):(-4,-6)] \\ 2a &= 4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Por otra parte, como $\dfrac{2b^2}{a} = 6$, se sigue que $b = \sqrt{6}$. Por lo tanto, $b = \sqrt{6}$. Por lo tanto, $c \notin \mathbb{R}$. Luego, no existe la ecuacipon de la elipse que cumpla las condiciones pedidas.

13. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Tenemos que:

$$\begin{aligned} 2a &= d[(1,-6):(9,-6)] \\ 2a &= 8 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

Por otra parte, como $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{3}{2}$, se sigue que $b = \sqrt{3}$. Por lo tanto, $c = \sqrt{6}$. Por lo tanto, $c = \sqrt{13}$. El centro de la elipse corresponde al punto medio de los vértices, luego el centro es el punto $(5,-6)$. Luego, la ecuación de la elipse queda determinada por:

$$\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{3} = 1$$

Las coordenadas de los focos son $F_1(5+\sqrt{13},-6)$ y $F_2(5-\sqrt{13},-6)$. Su excentricidad es $\frac{\sqrt{13}}{4}$.

14. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Tenemos que $2b = 8$, es decir $b = 4$. Por otra parte:

$$\begin{aligned} 2c &= d[(1,-6):(9,-6)] \\ 2c &= 6 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a = 5$. El centro de la elipse corresponde al punto medio de los focos, luego el centro es el punto $(3,5)$. Luego, la ecuación de la elipse queda determinada por:

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

Las coordenadas de los vértices son $V_1(3,10)$ y $V_2(3,0)$. Su excentricidad es $\frac{3}{5}$.

15. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Tenemos que:

$$\begin{aligned} a &= d[(3,-1):(-2,-1)] \\ a &= 5 \end{aligned}$$

Por otra parte, como $\dfrac{2b^2}{a} = 4$, se sigue que $b = \sqrt{10}$. Por lo tanto, $c = \sqrt{15}$. Luego, la ecuación de la elipse queda determinada por:

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{10} = 1$$

Las coordenadas de los focos son $F_1(-2+\sqrt{15},-1)$ y $F_2(-2-\sqrt{15},-1)$. Su excentricidad es $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

16. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Tenemos que:

$$\begin{aligned} a &= d[(2,-4):(-2,-4)] \\ a &= 4 \end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos que:

$$\begin{aligned} c &= d[(2,-4):(-1,-4)] \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $b = \sqrt{7}$. Luego, la ecuación de la elipse queda determinada por:

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{7} = 1$$

Su excentricidad es $\frac{3}{4}$. Longitud del eje menor igual a $2\sqrt{7}$. Longitud del lado recto igual a $\frac{7}{2}$.

17. $\boxed{\textbf{Solución:}}$ Completando cuadrados, tenemos que la ecuación está descrita de la forma:

$$\frac{\left(x+\frac{3}{k}\right)^2}{\frac{9k+9}{k^2}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{9k+9}{4k}} = 1$$

Supongamos que el eje mayor es paralelo al eje x. Tenemos que $a = \dfrac{3\sqrt{k+1}}{k}$, $b = \dfrac{3}{3}\sqrt{\dfrac{k+1}{k}}$, por ende, $c = \dfrac{3\sqrt{4+3k-k^2}}{2k}$. Por otra parte, $\dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$, de donde se concluye que $k = -1$ o $k = \dfrac{15}{4}$.