Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°9 Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

23 de Noviembre de 2011.

Ejercicios

1. Sea $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + 3b = 2d \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   a) Pruebe que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   b) Encuentre el conjunto de generadores escalonados de S.

Solución.

a) Vemos que $S \neq \emptyset$, pues $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S$.

Sean $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, es decir, $a_1 + 3b_1 = 2d_1$ y $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, es decir, $a_2 + 3b_2 = 2d_2$, debemos mostrar que $A + B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En efecto,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}.$$

Vemos que $a_1 + a_2 + 3(b_1 + b_2) = (a_1 + 3b_1) + (a_2 + 3b_2) = 2d_1 + 2d_2 = 2(d_1 + d_2)$, luego $A + B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, es decir, $a + 3b = 2d$. Debemos mostrar que $\alpha M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En efecto,

$$\alpha M = \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}.$$

Vemos que $\alpha a + 3(\alpha b) = \alpha(a + 3b) = \alpha(2d) = 2(\alpha d)$. Luego, $\alpha M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Por tanto, concluimos que $S \leq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Tenemos que $a+3b=2d \Rightarrow a=2d-3b$, luego:

$$\begin{bmatrix} 2d-3b & b \\ c & d \end{bmatrix} = d\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando tenemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{23}]{L_{23}(1)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{21}(-3)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2(-\frac{1}{2})]{L_1(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, el conjunto de generadores escalonados de S es:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

2. Encuentre condiciones sobre $a \in \mathbb{R}$ para que el vector $(2,-2,0)$ sea combinación lineal de los vectores de $U = \{(1,a,2),(1,-1,1),(a,1,1)\}$.

Solución.

El vector $(2,-2,0)$ es combinación lineal de los elementos de U si existen $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que:

$$\begin{aligned} (2,-2,0) &= \alpha(1,a,2)+\beta(1,-1,1)+\gamma(a,1,1) \\ &= (\alpha+\beta+a\gamma, a\alpha-\beta+\gamma, 2\alpha+\beta+\gamma) \end{aligned}$$

de donde tenemos el sistema lineal:

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta+a\gamma &= 2 \\ a\alpha-\beta+\gamma &= -2 \\ 2\alpha+\beta+\gamma &= 0 \end{aligned}\right|$$

Matricialmente tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ a & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_{31}(-2)]{L_{21}(-a)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & -1-a & 1-a^2 & -2-2a \\ 0 & -1 & 1-2a & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3(-1)]{\substack{L_{13}(1) \\ L_{23}(-1-a)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-a & -2 \\ 0 & 0 & a(1+a) & 2(1+a) \\ 0 & 1 & 2a-1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{23}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-a & -2 \\ 0 & 1 & 2a-1 & 4 \\ 0 & 0 & a(1+a) & 2(1+a) \end{array}\right]$$

De donde, $a(1+a)=0 \Rightarrow a=0 \wedge a=-1$. Por tanto, tenemos los casos:

Caso 1: Si $a=0$ el sistema es incompatible, pues obtenemos la matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Por lo que el vector $(2,-2,0)$ no es combinación lineal de los elementos de U.

Caso 2: Si $a=-1$ el sistema admite infinitas soluciones, pues la matriz toma la forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Por lo que el vector $(2,-2,0)$ es combinación lineal de los elementos de U.

Caso 3: Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$ el sistema admite una única solución, luego el vector $(2,-2,0)$ es combinación lineal de los elementos de U.

Puntaje: $(15+15)+(30)=60$ Puntos.