Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°8 Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

09 de Noviembre de 2011.

1. Resuelva el siguiente sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+3y-t &=& 1 \\ 3x+9y+t &=& 5 \\ 2x+6y+z+4t &=& 9 \end{array}\right|$$

Solución.

El sistema escrito en forma matricial queda como:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 4 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[L_{31}(-2)]{L_{21}(-3)} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2\left(\frac{1}{4}\right)} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_{32}(-6)]{L_{12}(1)} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{23}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

de donde $x+3y=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\frac{3}{2}-3y$, $y\in\mathbb{R}$, $z=4$ y $t=\frac{1}{2}$. Luego, el conjunto solución es:

$$S=\left\{\left(\frac{3}{2}-3y, y, 4, \frac{1}{2}\right); y\in\mathbb{R}\right\}.$$

2. Estudie según los valores del parámetro $\alpha\in\mathbb{R}$, el siguiente sistema de ecuaciones lineales y resuélvalo cuando sea posible.

$$\left.\begin{array}{rcc} x+3z &=& 1 \\ 3x+y+\left(\alpha^2+8\right)z &=& 6 \\ 2x+y+\left(2\alpha^2-\alpha+3\right)z &=& \alpha^2+1 \end{array}\right|$$

Solución.

El sistema queda escrito como:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & \alpha^2+8 & 6 \\ 2 & 1 & 2\alpha^2-\alpha+3 & \alpha^2+1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_{31}(-2)]{L_{21}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha^2-1 & 3 \\ 0 & 1 & 2\alpha^2-\alpha-3 & \alpha^2-1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_{32}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha^2-1 & 3 \\ 0 & 0 & (\alpha-2)(\alpha+1) & (\alpha-2)(\alpha+2) \end{array}\right]. \tag{1}$$

Por tanto, distinguimos tres casos:

Caso 1: Si reemplazamos $\alpha = 2$ en (1), tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

de donde $x + 3z = 1$ e $y + 3z = 3$, lo que implica $x = 1 - 3z$ e $y = 3 - 3z$ respectivamente. Luego:

$$S = \{(1-3z, 3-3z, z)\, ;\, z \in \mathbb{R}\}.$$

Caso 2: Si reemplazamos $\alpha = -1$ en (1), tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right],$$

de donde $0 = -3$, lo que es una contradicción. Luego, no existe solución.

Caso 3: Si $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq 1$ en (1), tenemos:

$$\xrightarrow{L_3\left(\frac{1}{(\alpha-2)(\alpha+1)}\right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha^2-1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha+2}{\alpha+1} \end{array}\right] \underset{L_{23}(1-\alpha^2)}{\xrightarrow{L_{13}(-3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2\alpha+5}{\alpha+1} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\alpha^3+2\alpha^2-4\alpha-5}{\alpha+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha+2}{\alpha+1} \end{array}\right]$$

de donde, existe una única solución:

$$S = \left\{\left(-\frac{2\alpha+5}{\alpha+1}, -\frac{\alpha^3+2\alpha^2-4\alpha-5}{\alpha+1}, \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right)\right\}.$$

Conclusión final:

a) Si $\alpha = 2$ el sistema admite infinitas soluciones dadas por:

$$S = \{(1-3z, 3-3z, z)\, ;\, z \in \mathbb{R}\}.$$

b) Si $\alpha = -1$ el sistema no admite solución.

c) Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, el sistema admite una única solución dada por:

$$S = \left\{\left(-\frac{2\alpha+5}{\alpha+1}, -\frac{\alpha^3+2\alpha^2-4\alpha-5}{\alpha+1}, \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right)\right\}.$$