UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIENCIAS Y ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Solución Taller N°12 Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

11 de Enero de 2012.

Ejercicios

1. Cálcule el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

2. Encuentra de manera factorizada, utilizando las propiedades el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ a^2+a & b^2+b & c^2+c \end{vmatrix}$$

3. Sean A y $B \in M_n(K)$; si $\det(A^tB^2) = -1$ y $\det((AB)^{-1}) = 4$, halle $\det A$ y $\det B$.

Puntaje: $25 + 25 + 10 = 60$ Puntos.

Solución.

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \overset{F_{54}(-1)}{=} \cdots \overset{F_{43}(-1)}{=} \cdots \overset{F_{32}(-1)}{=} \cdots \overset{F_{21}(-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^4$$

2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ a^2+a & b^2+b & c^2+c \end{vmatrix} \overset{F_{21}(-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2+a & b^2+b & c^2+c \end{vmatrix}$$
$$\overset{F_{32}(-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \underset{C_{23}(-1)}{\overset{C_{13}(-1)}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-c & b-c & c \\ a^2-c^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ (a-c)(a+c) & (b-c)(b+c) \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c & b+c \end{vmatrix}$$
$$\overset{C_{21}(-1)}{=} (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a+c & b-a \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)(b-a).$$

3. Tenemos que $\det(A^tB^2) = -1 \Longrightarrow \det A \cdot (\det B)^2 = -1$.

   Por lo tanto
$$\det A = \frac{-1}{(\det B)^2} \tag{1}$$
   por otro lado, $\det((AB)^{-1}) = 4 \Longrightarrow \dfrac{1}{\det AB} = 4 \Longrightarrow \det AB = \dfrac{1}{4}$

   de donde
$$\det A \cdot \det B = \frac{1}{4} \tag{2}$$
   reemplazando (1) en (2) se tiene:
$$\begin{aligned} \frac{-1}{(\det B)^2} \cdot \det B &= \frac{1}{4} \\ -\det B &= 4 \\ \det B &= -4 \end{aligned}$$
   de donde obtenemos que
$$\det A = -\frac{1}{16}$$