



Solución Taller N°11 Álgebra (IME006) Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez,
Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

28 de Diciembre de 2011.

Ejercicios

- Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicaciones lineales. Dadas las bases ordenadas $A = \{(1, 1, 1); (1, 0, -1); (1, 0, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 y $B = \{(2, 1); (1, 3)\}$ y $C = \{(1, 1); (1, 0)\}$ de \mathbb{R}^2 . Sabiendo que $(f; A; B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $(g; B; C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
 - Halle $(g \circ f; A; C)$.
 - Obtenga $(g \circ f)(x, y, z)$.
- Sean dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, que conmutan y además son idempotentes. Encuentra la expresión más simple para

$$(A + B)^3(A - B)$$

Puntaje: $(30 + 10) + 20 = 60$ Puntos.

Solución.

-

$$\begin{aligned} (g \circ f; A; C) &= (g; B; C) \cdot (f; A; B) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ (g \circ f; A; C) &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- - $(x, y, z) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 0, -1) + \gamma(1, 0, 0)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 1 & -1 & 0 & z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & -1 & 0 & z - y \\ 0 & 1 & 1 & x - y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & y - z \\ 0 & 0 & 1 & x - 2y + z \end{bmatrix}$$

por lo tanto $\alpha = y$, $\beta = y - z$ y $\gamma = x - 2y + z$. Por otro lado

$$\begin{aligned}(g \circ f)(1, 1, 1) &= 3(1, 1) + 0(1, 0) = (3, 3) \\(g \circ f)(1, 0, -1) &= 0(1, 1) + -3(1, 0) = (-3, 0) \\(g \circ f)(1, 0, 0) &= 3(1, 1) + 3(1, 0) = (6, 3)\end{aligned}$$

Así, finalmente tenemos

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x, y, z) &= \alpha(g \circ f)(1, 1, 1) + \beta(g \circ f)(1, 0, -1) + \gamma(g \circ f)(1, 0, 0) \\(g \circ f)(x, y, z) &= \alpha(3, 3) + \beta(-3, 0) + \gamma(6, 3) \\(g \circ f)(x, y, z) &= y(3, 3) + (y - z)(-3, 0) + (x - 2y + z)(6, 3) \\(g \circ f)(x, y, z) &= (3y - 3y + 3z + 6x - 12y + 6z, 3y + 3x - 6y + 3z) \\(g \circ f)(x, y, z) &= (6x - 12y + 9z, 3x - 3y + 3z)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(A + B)^3(A - B) &= (A + B)^2(A + B)(A - B) \\&= (A^2 + 2AB + B^2)(A^2 - B^2) \\&= (A + 2AB + B)(A - B) \\&= A^2 - AB + 2ABA - 2AB^2 + BA - B^2 \\&= A + 2A^2B - 2AB^2 - B \\&= A + 2AB - 2AB - B \\&= A - B\end{aligned}$$