UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIENCIAS Y ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Solución Taller N°10 Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

07 de Diciembre de 2011.

Ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}^3$ lineal definida por:

$$f(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b, b - 2c, c - d)$$

   a) Encuentre una base y la dimensión del $N(f)$.
   b) Encuentre una base y la dimensión de $Im(f)$.
   c) Determine si f es inyectiva, si es epiyectiva.

Puntaje: $(10 + 10 + 10) = 30$ Puntos.

Solución.

a) Como $f(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b, b - 2c, c - d)$, se tiene que:

$$N(f) = \left\{a + bt + ct^2 + dt^3 / a + b = 0, b - 2c = 0, c - d = 0\right\}$$

De donde $a = -b$, $c = \frac{b}{2}$ y $d = c = \frac{b}{2}$. Reemplazando

$$-b + bt + \frac{b}{2}t^2 + \frac{b}{2}t^3 = -b(1 - t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3)$$

De donde una base de $N(f)$ es $\{\ 1 - t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3\}$. Por lo tanto, $dimN(f) = 1$.

b) Tenemos que $Im(f) = \{(a + b, b - 2c, c - d)/a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, entonces $a(1, 0, 0)+ b(1, 1, 0) + c(0, -2, 1) + d(0, 0, -1) \in Im(f)$. Escalonando tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{F_3\left(\frac{-1}{2}\right)}{\xrightarrow{F_{21}(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{34}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto la base escalonada de $Im(f) = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$. Se tiene que $dimIm(f) = 3$

c) Como $dimN(f) = 1$, entonces f no es inyectiva, ya que $N(f) \neq \{0\}$. Además $dimIm(f) = dim\mathbb{R}^3$, por lo tanto $Im(f) = \mathbb{R}^3$, por tanto f es epiyectiva.

Otro argumento válido es: no puede haber una aplicación lineal inyectiva desde un espacio de dimensión 4 en uno de dimensión 3.

Puntaje: $(10 + 10 + 10) = 30$ Puntos.