Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Prueba N°5 Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

18 de Enero de 2012.

1. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ es la representación matricial de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ según las bases B y C, siendo $B = \{(1,0,1), (1,1,1), (1,0,0)\}$ y $C = \{(1,1), (1,2)\}$. Use las matrices de cambio de base para encontrar $(f; B', C')$ si $B' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ y $C' = \{(1,1), (-1,0)\}$.

Solución.

Tenemos que:

$$(f; B', C') = (C \text{ según } C') \cdot (f; B, C) \cdot (B' \text{ según } B).$$

Para $(B' \text{ según } B)$ tenemos:

$$\begin{aligned} (1,0,0) &= \boxed{0}(1,0,1) + \boxed{0}(1,1,1) + \boxed{1}(1,0,0) \\ (0,1,0) &= \boxed{-1}(1,0,1) + \boxed{1}(1,1,1) + \boxed{0}(1,0,0) \\ (0,0,1) &= \boxed{1}(1,0,1) + \boxed{0}(1,1,1) + \boxed{-1}(1,0,0) \end{aligned}$$

por tanto,

$$(B' \text{ según } B) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para $(C \text{ según } C')$ tenemos:

$$\begin{aligned} (1,1) &= \boxed{1}(1,1) + \boxed{0}(-1,1) \\ (1,2) &= \boxed{2}(1,1) + \boxed{1}(-1,1) \end{aligned}$$

por tanto,

$$(C \text{ según } C') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego, $(f; B', C')$ es:

$$(f; B', C') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, encuentre A^n para $n \in \mathbb{N}$ y demuestre por inducción que esta propiedad es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución.

Calculemos algunas potencias de A que nos permitan conjeturar una formula general

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \\ A^3 &= A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix} \\ A^4 &= A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, postulamos que

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix},$$

siendo ésta, la hiótesis de inducción. Falta entonces, demostrar la veracidad de la afirmación para $n+1$, es decir,

$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} a^{n+1} & (n+1)\,a^n \\ 0 & a^n \end{bmatrix},$$

En efecto,

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{n+1} & (n+1)\,a^n \\ 0 & a^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Concluyéndose que la afirmación es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Si A es una matriz ortogonal, es decir, $A^t = A^{-1}$, demuestre que $(\det(A))^2 = 1$.

Solución.

Tenemos que $A \cdot A^{-1} = I_n$, esto implica que $|A \cdot A^{-1}| = 1$, de donde $|A|\,|A^{-1}| = 1$. Pero, $A^{-1} = A^t$, luego $|A|\,|A^t| = 1$. Como $|A| = |A^t|$, concluimos que $|A|^2 = 1$.

4. Usando las propiedades calcule el siguiente determinante y exprese su valor en forma factorizada:

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & x & x & x \\ x & a_2 + x & x & x \\ x & x & a_3 + x & x \\ x & x & x & a_4 + x \end{vmatrix}$$

Solución.

Aplicando las propiedades de los determinantes tenemos:

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & x & x & x \\ x & a_2 + x & x & x \\ x & x & a_3 + x & x \\ x & x & x & a_4 + x \end{vmatrix} \underset{L_{41}(-1)}{\overset{L_{21}(-1)}{\underset{L_{31}(-1)}{=}}} \begin{vmatrix} a_1 + x & x & x & x \\ -a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_1+x)a_2a_3a_4 - x\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ -a_1 & a_3 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_4 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} -a_1 & a_2 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} -a_1 & a_2 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= a_1a_2a_3a_4 + xa_2a_3a_4 + xa_1a_3a_4 + xa_1a_2a_4 + xa_1a_2a_3.
\end{aligned}
$$

5. Estudie la diagonalización del endomorfismo $f \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}^3\right)$ representado mediante la matriz de f según la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$
M = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

Si f es diagonalizable halle la base diagonalizante B, la matriz diagonal D y la matriz invertible P tal que $D = P^{-1}MP$ (no es necesario encontrar P^{-1}).

Solución.

Para el polinomio característico debemos calcular $\det\left(M - \lambda \mathbb{I}_3\right)$, es decir,

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_{32}(1)}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_{23}(-1)}{=} -\lambda\begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -\lambda\begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_{21}(1)}{=} -\lambda\begin{vmatrix} 4-\lambda & -\lambda \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{L_{12}(-1)}{=} -\lambda\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(6-\lambda).
\end{aligned}
$$

Por tanto, el polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2(6-\lambda)$. Encontrando las raíces de $p(\lambda)$ tenemos que los valores propios asociados a M son $\lambda = 0$ de multiplicidad doble y $\lambda = 6$ de multiplicidad simple.

Por su parte, para los vectores propios debemos resolver $\left(M - \lambda\mathbb{I}_3\right)\vec{v} = \vec{0}$:

Caso $\lambda = 0$:

$$
\begin{aligned}
\left(M - (0)\,\mathbb{I}_3\right) &= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

De donde, $x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z$ con $x, y \in \mathbb{R}$, por tanto, $S_{\lambda=0} = \left\{\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, y, z\right), y, z \in \mathbb{R}\right\} = \langle (1,2,0), (-1,0,2)\rangle$ y $\dim\left(S_{\lambda=0}\right) = 2$.

Caso $\lambda = 6$**:**

$$(M - (6)\,\mathbb{I}_3) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De donde, $x - 2z = 0 \Rightarrow x = 2z$ e $y = -z$, por tanto, $S_{\lambda=6} = \{(2z, -z, z)\,, z \in \mathbb{R}\} = \langle (2, -1, 1) \rangle$ y $\dim(S_{\lambda=-6}) = 1$.

Como la dimensión de cada subespacio S_λ coincide con la multiplicidad de su valor propio asociado concluimos que la matriz M es diagonalizable. Por lo anterior, una base diagonalizante de f es $B = \{(1, 2, 0)\,, (-1, 0, 2)\,, (2, -1, 1)\}$. La matriz P invertible es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

y satisface,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = P^{-1} M P.$$

$\boxed{\text{Puntaje: } (12) + (12) + (12) + (12) + (12) = 60 \text{ Puntos.}}$