Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Prueba N°4 Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

14 de Diciembre de 2011.

1. Encuentre condiciones sobre β para que $v = (1, 0, 1, -2)$ sea combinación lineal de los vectores del conjunto $S = \{(1, -1, 1, 0), (2, -1, 1, 1), (\beta, 2, -1, 0), (3 + \beta, 0, 1, 1)\}$

   Solución.

   Sea $v = x(1, -1, 1, 0) + y(2, -1, 1, 1) + z(\beta, 2, -1, 0) + t(3 + \beta, 0, 1, 1)$

   Tenemos la familia de sistemas de ecuaciones siguiente:

$$\begin{array}{rcr} x + 2y + \beta z + (3 + \beta)t & = & 1 \\ -x - y + 2z & = & 0 \\ x + y - z + t & = & 1 \\ y + t & = & -2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \beta & 3+\beta & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta+1 & \beta+2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \beta+1 & \beta+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \beta+1 & \beta+1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

   De donde vemos que existe solución solamente si $\beta = 1$.

2. Halla la base escalonada y dimensión de $S + T$ si:

$$\begin{array}{rcl} S & = & \left\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4; b = c - d, a = 2d\right\} \\ T & = & \langle (4, -1, 1, 2), (1, -1, 1, 1), (5, -2, 2, 3), (6, -3, 3, 4) \rangle \end{array}$$

Solución.

Escribamos S en forma paramétrica, se tiene: $S = \{(2d, c-d, c, d); c, d \in \mathbb{R}\}$, luego un conjunto de generadores de S es: $\{(2,-1,0,1),(0,1,1,0)\}$. Escalonemos el conjunto de generadores de T:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Busquemos la base escalonada de $S+T$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & -2/3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & -2/3 \\ 0 & -1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Entonces la base escalonada de $S+T$ es: $\left\{(1,0,0,\frac{1}{3}),(0,1,0,-\frac{1}{3}),(0,0,1,\frac{1}{3})\right\}$ y $\dim_{\mathbb{R}}(S+T) = 3$

3. Si $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ está definida por:

$$f(a + bX + cX^2 + dX^3) = (c - d + b, b + c, 3c - 2d + 3b)$$

   a) Halle $N(f)$, la base escalonada y su dimensión.
   b) Halle $Im(f)$, la base escalonada y su dimensión.
   c) Estudie inyectividad y epiyectividad de f. Justifique.

Solución.

a) Tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces $b = -c$; $d = 0$.

Luego un elemento típico de $N(f)$, tiene la forma:

$$a - cX + cX^2 = a + c(-X + X^2).$$

Luego la base escalonada de $N(f)$ es $\{1, X - X^2\}$ y $\dim N(f) = 2$.
Puesto que $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, tenemos que: $\dim Im(f) = 2$.

b) $Im(f) = \{(b + c - d, b + c, 3b + 3c - 2d); b, c, d \in \mathbb{R}\}$.
Un conjunto de generadores de $Im(f)$ es: $\{(1,1,3), (1,1,3), (-1,0,-2)\}$
Busquemos su base escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la base escalonada de $Im(f)$ es $\{(1,0,2), (0,1,1)\}$ y $\dim Im(f) = 2$.

c) $\dim N(f) = 2 \neq 0$, luego f no es inyectiva. $\dim Im(f) = 2 \neq 3 = \dim Codom(f)$, luego f no es epiyectiva.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$. Encuentre $(T; B, C)$ donde $B = \{(1,-1,0), (2,0,1), (1,2,1)\}$ y $C = \{(-1,0), (0,1)\}$.

Solución.

$$\begin{aligned} T(1,-1,0) = (2,1) &= -2(-1,0) + 1(0,1) \\ T(2,0,1) = (2,3) &= -2(-1,0) + 3(0,1) \\ T(1,2,1) = (-1,2) &= 1(-1,0) + 2(0,1) \end{aligned}$$

Luego $(T; B, C) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Puntaje: $(15) + (15) + (15) + (15) = 60$ Puntos.