Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°8 Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

27 de Octubre de 2010.

1. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aplicaciones lineales tales que $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Dom}(g)$. Sean $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$, $C = \{(1,0), (1,1)\}$ y $D = \{(1,1,1), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Considere que

$$
\begin{aligned}
(f; B, C) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
(g; C, D) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Encuentre $(g \circ f)(x, y, z)$.

Solución.

Sabemos que:

$$
\begin{aligned}
(g \circ f; B, D) &= (g; C, D) \cdot (f; B, C) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(1,1,1) &= \boxed{1}(1,1,1) + \boxed{0}(0,1,0) + \boxed{1}(0,0,1) = (1,1,2) \\
(g \circ f)(1,1,0) &= \boxed{-1}(1,1,1) + \boxed{-2}(0,1,0) + \boxed{1}(0,0,1) = (-1,-3,0) \\
(g \circ f)(1,0,0) &= \boxed{2}(1,1,1) + \boxed{2}(0,1,0) + \boxed{0}(0,0,1) = (2,4,2)
\end{aligned}
$$

Ahora bien,

$$(x, y, z) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0),$$

implica que $\alpha = z$, $\beta = y - z$ y $\gamma = x - y$. Por tanto,

$$(x, y, z) = z(1,1,1) + (y - z)(1,1,0) + (x - y)(1,0,0).$$

Luego,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x,y,z) &= z\,(g \circ f)(1,1,1) + (y-z)\,(g \circ f)(1,1,0) + (x-y)\,(g \circ f)(1,0,0)\\ &= z\,(1,1,2) + (y-z)\,(-1,-3,0) + (x-y)\,(2,4,2)\\ &= (2x-3y+2z, 4x-7y+4z, 2x-2y+2z)\,.\end{aligned}$$

2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A^2 = A$ y sea $B = I_n - A$. Demuestre que:

   a) $B^2 = B$

   b) $AB = BA = 0$

Solución.

a) $B^2 = (I_n - A)(I_n - A) = I_n^2 - I_nA - AI_n + A^2 = I_n - A - A + A = I_n - A = B$.

b) Por un lado tenemos: $AB = A(I_n - A) = AI_n - A^2 = A - A = 0$. Por otro lado, $BA = (I_n - A)A = I_nA - A^2 = A - A = 0$.

Puntaje: $(4) + (1+1) = 6$ Puntos.