Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°7 Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

24 de Septiembre de 2010.

Ejercicio

En $\mathbb{R}^4$, considere los subespacios vectoriales:

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{(x+2y+z, -2x-3y, 2x+6y+6z, 6x+17y+16z)\,; x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ T & = & \{(x+y, -x+2y, 4x+10y, -3x-9y)\,; x,y \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

Encuentre la base escalonada de S, T, $S+T$ y $S \cap T$.

Solución

Tenemos que el conjunto de generadores de S es $\{(1,-2,2,6), (2,-3,6,17), (1,0,6,16)\}$. Luego, para la base escalonada tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 16 \\ 1 & -2 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 6 & 17 \end{bmatrix} \underset{L_{31}(-2)}{\xrightarrow{L_{21}(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 16 \\ 0 & -2 & -4 & -10 \\ 0 & -3 & -6 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3(-\frac{1}{3})}{\xrightarrow{L_2(-\frac{1}{2})}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, la base escalonada de S es $B_S = \{(1,0,6,16), (0,1,2,5)\}$.

Por su parte, los generadores de T son $\{(1,-1,4,-3), (1,2,10,-9)\}$. Escalonando tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 10 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2(\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Luego, la base escalonada de T es $B_T = \{(1,0,6,-5), (0,1,2,-2)\}$.

Para la suma de los subespacios tenemos $S+T = \langle B_S \cup B_T \rangle$. Escalonando tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \underset{L_{42}(-1)}{\xrightarrow{L_{31}(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4\left(-\frac{1}{7}\right)]{L_3\left(-\frac{1}{21}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{43}(-1)]{\substack{L_{13}(-16) \\ L_{23}(-5)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la base escalonada de $S+T$ es $B_{S+T} = \{(1,0,6,0),(0,1,2,0),(0,0,0,1)\}$.

Además, $\dim(S+T) = 3$, $\dim(S) = 2$ y $\dim(T) = 2$, lo que implica $\dim(S \cap T) = 1$. Sea $\vec{v} \in S \cap T$, entonces:

$$\vec{v} = a(1,0,6,16) + b(0,1,2,5) = \alpha(1,0,6,-5) + \beta(0,1,2,-2).$$

A partir de esto tenemos,

$$\begin{aligned} a &= \alpha && (1) \\ b &= \beta && (2) \\ 6a + 2b &= 6\alpha + 2\beta && (3) \\ 16a + 5b &= -5\alpha - 2\beta && (4) \end{aligned}$$

Reemplazando (1) y (2) en (4) obtenemos $b = -3a$. Luego,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= a(1,0,6,16) - 3a(0,1,2,5) \\ &= a(1,-3,0,1) \end{aligned}$$

Luego, la base escalonada de $S \cap T$ es $B_{S\cap T} = \{(1,-3,0,1)\}$.