Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°6 Álgebra (IME006) Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

20 de Agosto de 2010.

Ejercicio

Resuelva la siguiente familia de sistemas según los diferentes valores del parámetro real k:

$$\left.\begin{array}{rcc} x+5y-t & = & 0 \\ x+5y+z & = & 2 \\ 2x+10y+z+(k^2-k-3)\,t & = & k^2+2k-6 \end{array}\right|$$

Solución

El sistema escrito en forma matricial queda como:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 10 & 1 & k^2-k-3 & k^2+2k-6 \end{array}\right] \xrightarrow[L_{31}(-2)]{L_{21}(-1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & k^2-k-1 & k^2+2k-6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_{32}(-1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-k-2 & k^2+2k-8 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (k-2)\,(k+1) & (k-2)\,(k+4) \end{array}\right] \tag{1}$$

Caso 1: Si reemplazamos $k=2$ en (1) tenemos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

es decir, $x+5y-t=0 \Rightarrow x=t-5y$ y $z+t=2 \Rightarrow z=2-t$. Por tanto, el conjunto solución es $S=\{(t-5y,y,2-t,t)\,;y,t\in\mathbb{R}\}$.

Caso 2: Si reemplazamos $k = -1$ en (1) tenemos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right]$$

que implica la no existencia de solución.
Caso 3: Si $k \in \mathbb{R}$ tal que $k \neq 2$ y $k \neq -1$ en (1) tenemos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (k-2)(k+1) & (k-2)(k+4) \end{array}\right] \xrightarrow{L_3\left(\frac{1}{(k-2)(k+1)}\right)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{k+4}{k+1} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_{23}(-1)]{L_{13}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 0 & 0 & \frac{k+4}{k+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{k-2}{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{k+4}{k+1} \end{array}\right]$$

Por tanto, el conjunto solución es $S = \left\{\left(\frac{k+4}{k+1} - 5y, y, \frac{k-2}{k+1}, \frac{k+4}{k+1}\right); y \in \mathbb{R}\right\}$.

Conclusión final:

1. Si $k = 2$ el sistema (1) admite infinitas soluciones dadas por:

$$S = \{(t - 5y, y, 2 - t, t); y, t \in \mathbb{R}\}.$$

2. Si $k = -1$ el sistema (1) no admite solución.

3. Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, el sistema (1) admite infinitas soluciones dadas por:

$$S = \left\{\left(\frac{k+4}{k+1} - 5y, y, \frac{k-2}{k+1}, \frac{k+4}{k+1}\right); y \in \mathbb{R}\right\}.$$