Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°10 Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

17 de Noviembre de 2010.

Ejercicio.

Considere la matriz de un endomorfismo f de $\mathbb{K}^3$, respecto a la base canónica dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre:

(a) El polinomio característico.

(b) Los valores propios de f y sus subespacios asociados.

(c) Una base diagonalizante D.

(d) La matriz diagonal $(f; D, D)$ y una matriz invertible P tal que $(f; D, D) = P^{-1}MP$.

Solución.

(a) Para el polinomio característico debemos calcular $\det(M - \lambda\mathbb{I}_3)$, es decir,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_{12}(1)}{\underset{C_{32}(1)}{=}} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2-\lambda & 3-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_{21}(-1)}{=} (2-\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(4-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(4-\lambda)(2+\lambda). \end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - 2)(4-\lambda)(2+\lambda)$.

(b) Encontrando las raíces de $p(\lambda)$ tenemos que los valores propios asociados a f son $\lambda = -2$, $\lambda = 2$ y $\lambda = 4$ todos con multiplicidad simple.

Por su parte, para los vectores propios debemos resolver $(M - \lambda\mathbb{I}_3)\vec{v} = \vec{0}$:

Caso $\lambda = -2$:

$$(M - (-2)\mathbb{I}_3) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_3(\frac{1}{3})}{\xrightarrow{L_1(\frac{1}{2})}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_{31}(1)}{\xrightarrow{L_{21}(1)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_{32}(-\frac{1}{3})]{L_{12}(-\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2(\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De donde, $x - z = 0 \Rightarrow x = z$ y $y = 0$, por tanto, $S_{\lambda=-2} = \{(x, 0, x), x \in \mathbb{R}\} = \langle(1, 0, 1)\rangle$ y $\dim(S_{\lambda=-2}) = 1$.

Caso $\lambda = 2$:

$$(M - 2\mathbb{I}_3) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{31}(3)]{L_{21}(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_{32}(-1)]{L_{12}(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De donde, $x - y = 0 \Rightarrow x = y$ y $z = 0$, por tanto, $S_{\lambda=2} = \{(x, x, 0), x \in \mathbb{R}\} = \langle(1, 1, 0)\rangle$ y $\dim(S_{\lambda=2}) = 1$.

Caso $\lambda = 4$:

$$(M - 4\mathbb{I}_3) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{32}(3)]{L_{12}(2)} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{31}(-1)]{L_{21}(-\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2(-1)]{L_1(-\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De donde, $x = 0$ y $y - z = 0 \Rightarrow y = z$, por tanto, $S_{\lambda=4} = \{(0, y, y), y \in \mathbb{R}\} = \langle(0, 1, 1)\rangle$ y $\dim(S_{\lambda=4}) = 1$.

Como la dimensión de cada subespacio S_λ coincide con la multiplicidad de su valor propio asociado concluimos que la matriz M es diagonalizable.

(c) Por lo anterior, una base diagonalizante de f es $D = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

(d) La matriz P es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que tiene por inversa a

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

y satisface,

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{Puntaje: } (2) + (1) + (1) + (2) = 6 \text{ Puntos.}}$