Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Prueba Global II Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

09 de Diciembre de 2010.

Instrucciones: *Debe responder la evaluación de manera ordenada y detallada, utilizando sólo el cuadernillo que le ha sido entregado. No se responderán consultas pues, la redacción es suficientemente clara.* **No está permitido el uso de calculadora o celular.**

1. Sea $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, donde i es la unidad imaginaria. Calcule J^{2010}.

   Solución.

   Veamos algunos calculos previos:

$$
\begin{aligned}
J^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
J^3 &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_3
\end{aligned}
$$

   Ahora bien, $J^{2010} = (J^3)^{670} = (\mathbb{I}_3)^{670} = \mathbb{I}_3$. Por tanto,

$$
J^{2010} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

2. Calcule, usando las propiedades, el siguiente determinante: $\begin{vmatrix} a & a & b & a \\ b & b & b & a \\ b & a & a & a \\ b & a & a & b \end{vmatrix}$.

   Solución.

Aplicando las propiedades tenemos:

$$\begin{vmatrix} a & a & b & a \\ b & b & b & a \\ b & a & a & a \\ b & a & a & b \end{vmatrix} \underset{L_{41}(-1)}{\overset{L_{21}(-1)}{\overset{L_{31}(-1)}{=}}} \begin{vmatrix} a & a & b & a \\ b-a & b-a & 0 & 0 \\ b-a & 0 & a-b & 0 \\ b-a & 0 & a-b & b-a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)^3 \begin{vmatrix} a & a & b & a \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_{43}(-1)}{\overset{L_{12}(-a)}{=}} (b-a)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & b & a \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)^3 \, b \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^3 \, b.$$

3. Calcule el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

Solución.

Aplicando las propiedades tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} \underset{\substack{\vdots \\ L_{(n-1)n}(-1)}}{\overset{L_{1n}(-1)}{\overset{L_{2n}(-1)}{=}}} \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$= (1-n)\cdot(2-n)\cdot(3-n)\cdot\ldots\cdot((n-1)-n)\cdot n$$

$$= (-1)^{n-1}\cdot n\,(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

$$= (-1)^{n-1}\cdot n!$$

4. Sea $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

   a) Pruebe que si T^{-1} existe y $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \neq 0$, entonces sus valores propios son $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$.

$\boxed{\text{Solución.}}$

Para $i = 1, \ldots, n$, sea λ_i valor propio de T, entonces existe $\vec{v}_i$ tal que $T(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$. Luego, $T^{-1}(T(\vec{v}_i)) = T^{-1}(\lambda_i \vec{v}_i)$. Pero, $T^{-1}(T(\vec{v}_i)) = \vec{v}_i$. Así, $\vec{v}_i = \lambda_i T^{-1}(\vec{v}_i)$, lo que implica, $T^{-1}(\vec{v}_i) = \frac{1}{\lambda_i}\vec{v}_i$. Es decir, $\frac{1}{\lambda_i}$ es valor propio de T^{-1}.

b) Pruebe que los valores propios de T^2 son $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$.

$\boxed{\text{Solución.}}$

Para $i = 1, \ldots, n$, sea λ_i valor propio de T, entonces existe $\vec{v}_i$ tal que $T(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$. Luego, $(T \circ T)(\vec{v}_i) = T(\lambda_i \vec{v}_i) = \lambda_i T(\vec{v}_i) = \lambda_i^2 \vec{v}_i$. Es decir, λ_i^2 es valor propio de T^2.

5. Sea $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo cuya matriz respecto a la base canónica es $M_a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$, estudie si M_a es diagonalizable.

$\boxed{\text{Solución.}}$

Tenemos:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_3) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Ahora bien, las raíces de $p(\lambda)$ son $\lambda = a$, $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$.

Caso $a \neq \pm 1$: tenemos los tres valores propios distintos, por lo que M_a es diagonalizable.

Caso $a = 1$: Tenemos un valor propio $\lambda = a = 1$ de multiplicidad doble. Luego

$$(A - (1)\mathbb{I}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es decir, $2x - y - z = 0 \Rightarrow z = 2x - y$ con $x, y \in \mathbb{R}$, por tanto, $S_{\lambda=1} = \{(x, y, 2x-y), x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,2), (0,1,-1) \rangle$ y $\dim(S_{\lambda=1}) = 2$. Por tanto, M_a es diagonalizable.

Caso $a = -1$: Tenemos un valor propio $\lambda = a = -1$ de multiplicidad doble. Luego

$$(A - (-1)\mathbb{I}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{32}(1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3\left(\frac{1}{4}\right)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{23}(-2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2(-1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es decir, $x = 0$ e $y + z = 0 = 0 \Rightarrow z = -y$ con $y \in \mathbb{R}$, por tanto, $S_{\lambda=-1} = \{(0, y, -y), x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (0,1,1) \rangle$ y $\dim(S_{\lambda=1}) = 1$. Por tanto, M_a no es diagonalizable.

Puntaje: $(8) + (16) + (12) + (10) + (14) = 60$ Puntos.