UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIENCIAS Y ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Solución Prueba N°6 Álgebra (IME006) Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

24 de Noviembre de 2010.

1. Considere las bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ dadas por $A = \{(1,2,-1), (1,1,0), (2,2,-1)\}$ y $B = \{(1,1,0), (2,0,0), (1,1,1)\}$. Encuentre la matriz de cambio de la base A a la base B y úsela para obtener las componentes del vector $\vec{v}$ en la base B, si sus componentes en la base A son $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   Solución.

   Escribimos los vectores de la base A como combinación lineal de los elementos de la base B:

$$\begin{aligned}
(1,2,-1) &= \boxed{3}(1,1,0) + \boxed{-\tfrac{1}{2}}(2,0,0) + \boxed{-1}(1,1,1) \\
(1,1,0) &= \boxed{1}(1,1,0) + \boxed{0}(2,0,0) + \boxed{0}(1,1,1) \\
(2,2,-1) &= \boxed{3}(1,1,0) + \boxed{0}(2,0,0) + \boxed{-1}(1,1,1)
\end{aligned}$$

   Por tanto, la matriz de cambio de base es:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Con esto, las componentes de $\vec{v}$ según la base B son:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Considere la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}.$$

a) Demuestre que $A \cdot A^t = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \cdot \mathbb{I}_4$.

b) Utilizando el resultado anterior, deduzca el valor de $\det(A)$.

Solución.

a) En efecto,

$$\begin{aligned}
A \cdot A^t &= \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix} \\
&= \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \cdot \mathbb{I}_4.
\end{aligned}$$

b) Para el determinante tenemos:

$$\det\left(A \cdot A^t\right) = \det\left(\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4 \cdot \mathbb{I}_4\right).$$

Pero el determinante de un producto es el producto de los determinantes, luego,

$$\det(A) \cdot \det\left(A^t\right) = \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4 \det(\mathbb{I}_4).$$

Recordando que $\det(A) = \det(A^t)$ y que $\det(\mathbb{I}_4) = 1$ tenemos:

$$(\det(A))^2 = \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4,$$

de donde, extrayendo raíz cuadrada obtenemos:

$$\det(A) = \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2.$$

3. Calcule el valor del siguiente determinante de orden n:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Solución.

Aplicando las propiedades de los determinantes tenemos:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 0 & x & x & \cdots & x \\
1 & x & 0 & x & \cdots & x \\
1 & x & x & 0 & \cdots & x \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
1 & x & x & x & \cdots & 0
\end{vmatrix}_{n\times n}
& \overset{\substack{L_{32}(-1)\\ L_{42}(-1)}}{\underset{\substack{\vdots\\ L_{n2}(-1)}}{=}}
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 0 & x & x & \cdots & x \\
0 & x & -x & 0 & \cdots & 0 \\
0 & x & 0 & -x & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & x & 0 & 0 & \cdots & -x
\end{vmatrix}_{n\times n} \\
&= (-1)
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
x & -x & 0 & \cdots & 0 \\
x & 0 & -x & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
x & 0 & 0 & \cdots & -x
\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \\
& \overset{\substack{C_{12}(1)\\ C_{13}(1)}}{\underset{\substack{\vdots\\ C_{1(n-1)}(1)}}{=}} (-1)
\begin{vmatrix}
n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & -x & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -x
\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} \\
&= (-1)\,(n-1)\,(-x)^{n-2} \\
&= (-1)^{n-1}\,(n-1)\,x^{n-2}.
\end{aligned}
$$

4. Considere la matriz de un endomorfismo T de $\mathbb{R}^3$, respecto a la base canónica dada por:

$$
M = \begin{bmatrix} -11 & -10 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & -10 & 9 \end{bmatrix}.
$$

Encuentre:

a) El polinomio característico.

b) Los valores propios de T y sus subespacios asociados.

c) Una base diagonalizante D.

d) La matriz diagonal $(T; D, D)$ y una matriz invertible P tal que $(T; D, D) = P^{-1}MP$.

Solución.

a) Para el polinomio característico debemos calcular $\det(M-\lambda\mathbb{I}_3)$, es decir,

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \begin{vmatrix} -11-\lambda & -10 & 5 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -15 & -10 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} -11-\lambda & 5 \\ -15 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{L_{12}(-1)}{=} (4-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -4+\lambda \\ -15 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -15 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{C_{21}(1)}{=} (4-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -15 & -6-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(4-\lambda)^2(6+\lambda).
\end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio característico es $p(\lambda) = -(4-\lambda)^2(6+\lambda)$.

b) Encontrando las raíces de $p(\lambda)$ tenemos que los valores propios asociados a T son $\lambda = 4$ de multiplicidad doble y $\lambda = -6$ de multiplicidad simple.

Por su parte, para los vectores propios debemos resolver $(M-\lambda\mathbb{I}_3)\vec{v} = \vec{0}$:

Caso $\lambda = 4$**:**

$$\begin{aligned}
(M-(4)\mathbb{I}_3) &= \begin{bmatrix} -15 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -15 & -10 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{31}(-1)} \begin{bmatrix} -15 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{L_1\left(-\frac{1}{15}\right)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De donde, $x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}y$ con $x, y \in \mathbb{R}$, por tanto, $S_{\lambda=4} = \left\{\left(\frac{1}{3}z - \frac{2}{3}y, y, z\right), y, z \in \mathbb{R}\right\} = \langle(-2,3,0),(1,0,3)\rangle$ y $\dim(S_{\lambda=4}) = 2$.

Caso $\lambda = -6$**:**

$$(M-(-6)\mathbb{I}_3) = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 5 \\ 0 & 10 & 0 \\ -15 & -10 & 15 \end{bmatrix} \underset{L_{32}(1)}{\xrightarrow{L_{12}(1)}} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & 0 \\ -15 & 0 & 15 \end{bmatrix} \underset{L_2\left(\frac{1}{10}\right)}{\xrightarrow{L_1\left(-\frac{1}{5}\right)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -15 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{31}(15)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De donde, $x - z = 0 \Rightarrow x = z$ e $y = 0$, por tanto, $S_{\lambda=-6} = \{(x,0,x), x \in \mathbb{R}\} = \langle(1,0,1)\rangle$ y $\dim(S_{\lambda=-6}) = 1$.

Como la dimensión de cada subespacio S_λ coincide con la multiplicidad de su valor propio asociado concluimos que la matriz M es diagonalizable.

c) Por lo anterior, una base diagonalizante de T es $D = \{(-2,3,0),(1,0,3),(1,0,1)\}$.

(d) La matriz P es

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

que tiene por inversa a

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

y satisface,

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & -10 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -15 & -10 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Puntaje: $(14) + (8 + 6) + (16) + (16) = 60$ Puntos.