Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Prueba N°5 Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

06 de Octubre de 2010.

Instrucciones: *Debe responder la evaluación de manera ordenada y detallada, utilizando sólo el cuadernillo que le ha sido entregado. No se responderán consultas pues, la redacción es suficientemente clara.* **No está permitido el uso de calculadora o celular.**

1. Dada $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[t]$ definida por $f(a,b,c,d) = 2a-4b+(c-d)t+(2a+c-d)t^2$,

   a) Obtenga la base escalonada y dimensión del núcleo de f.

   b) Obtenga la base escalonada y dimensión del conjunto imagen de f.

   c) Determine si f es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva. Justifique adecuadamente.

$\boxed{\text{Solución.}}$

a) Como el núcleo de f está constituido por todos los $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tal que $f(a,b,c,d) = 0+0\cdot t+0\cdot t^2$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2a-4b &=& 0 \\ c-d &=& 0 \\ 2a+c-d &=& 0 \end{array}\right|$$

es decir,

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_{32}(-1)}{\xrightarrow{L_1\left(\frac{1}{2}\right)}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De donde, $a=b=0$ y $c=d$. Luego, $N(f) = \{(0,0,c,c)\,;c\in\mathbb{R}\}$. Con esto, la base escalonada del núcleo es $B_{N(f)} = \{(0,0,1,1)\}$ y $\dim(N(f)) = 1$.

b) Para la base escalonada del conjunto imagen tenemos:

$$2a-4b+(c-d)t+(2a+c-d)t^2 = a\left(2+2t^2\right)+b(-4)+c\left(t+t^2\right)+d\left(-t-t^2\right)$$

Con esto,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{43}(1)]{L_1\left(\frac{1}{2}\right)\; L_2\left(-\frac{1}{4}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{23}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la base escalonada del conjunto imagen es $B_{Im(f)} = \{1, t, t^2\}$ y $\dim(Im(f)) = 3$.

c) Como $\dim(N(f)) = 1 \neq 0$ tenemos que f no es inyectiva. Por su parte, como $\dim(Im(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[t])$ concluimos que f es sobreyectiva. Así, f no es biyectiva.

2. ¿Existirá una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$ que verifique las siguientes condiciones?

   a) $N(T) = \langle (1,1,2) \rangle$ e $Im(T) = \langle 1, 1+t, 1+t+t^2 \rangle$.

   b) $N(T) = \langle (1,1,2) \rangle$ e $Im(T) = \langle 1+t, 2+2t, 1-t+t^2 \rangle$.

En cada caso justifique adecuadamente.

Solución.

a) Tenemos que $\dim(Dom(T)) = 3$ y $\dim(N(T)) = 1$. Por otro lado, el conjunto $\{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ es linealmente independiente, entonces $\dim(Im(T)) = 3$. De donde vemos que no se satisface la igualdad $\dim(Dom(T)) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T))$, luego no existe $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$ que cumpla con lo demandado.

b) Como en el punto anterior, tenemos que $\dim(\text{Dom}(T)) = 3$ y $\dim(N(T)) = 1$. Por otro lado, el conjunto $\{1+t, 2+2t, 1-t+t^2\}$ es linealmente dependiente con $\dim(Im(T)) = 2$. Por lo que se satisface la igualdad $\dim(\text{Dom}(T)) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T))$, luego existe $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$ que cumpla con en enunciado. Por ejemplo, $T(1,1,2) = 0$, $T(0,1,0) = 1-t+t^2$, $T(0,0,1) = 1+t$.

3. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y,z) = (x+y+z, x-z)$ una aplicación lineal, $B = \{(1,1,1), (-1,2,1), (2,3,1)\}$ y $C = \{(1,2), (1,1)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Determine $(g; B, C)$.

Solución.

Tenemos que:

$$\begin{aligned} g(1,1,1) &= (3,0) = \boxed{-3}\,(1,2) + \boxed{6}\,(1,1) \\ g(-1,2,1) &= (2,-2) = \boxed{-4}\,(1,2) + \boxed{6}\,(1,1) \\ g(2,3,1) &= (6,1) = \boxed{-5}\,(1,2) + \boxed{11}\,(1,1) \end{aligned}$$

Por lo que la matriz buscada es:

$$(g; B, C) = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 6 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

4. Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \to W$ una aplicación lineal inyectiva. Si $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ es un subconjunto linealmente independiente de vectores de V, demuestre que el conjunto $f(B) = \{f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)\}$ es linealmente independiente.

   Solución.

   Debemos mostrar que $\alpha_1 f(\vec{v}_1) + \ldots + \alpha_n f(\vec{v}_n) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. En efecto, por linealidad podemos escribir:

$$f(\alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n) = \vec{0}.$$

   Como f es inyectiva tenemos que $N(f) = \left\{\vec{0}\right\}$, luego,

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}.$$

   Pero, B es un subconjunto linealmente independiente de vectores de V, por lo que, solo se puede obtener el vector $\vec{0}$ de manera trivial, entonces

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

   De donde, $f(B) = \{f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)\}$ es linealmente independiente.

Puntaje: $(5 + 5 + 5) + (9 + 9) + (16) + (11) = 60$ Puntos.