Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Prueba N°4 Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

01 de Septiembre de 2010.

1. Sea $V = \mathbb{R}^3$. Estudie si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

   a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xy \geq 0\}$.

   b) $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = 0 \wedge x + 3z = 0\}$.

   Solución.

   a) S no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, pues $(2, 2, 0) \in S$ y $(-3, -1, 0) \in S$, pero $(2, 2, 0) + (-3, -1, 0) = (-1, 1, 0) \notin S$, pues $(-1) \cdot 1 < 0$.

   b) $T \leq \mathbb{R}^3$. En efecto,

      i) $T \neq \emptyset$, pues $(0, 0, 0) \in T$.

      ii) Sean $t, t' \in T$, es decir, $t = (x, y, z)$ y $t' = (x', y', z')$ tales que $x - y = 0$, $x+3z = 0$ y $x'-y' = 0$, $x'+3z' = 0$ respectivamente. Debemos mostrar que $t+t' \in T$. Tenemos $t+t' = (x, y, z)+(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$, además según las condiciones $(x + x')-(y + y') = x-y+x'-y' = 0+0 = 0$ y $(x + x') + 3 (z + z') = x + 3z + x' + 3z' = 0 + 0 = 0$. Luego, $t + t' \in T$.

      iii) Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $t \in T$ es decir, $t = (x, y, z)$ tal que $x - y = 0$, $x + 3z = 0$. Debemos mostrar que $\alpha t \in T$. Tenemos $\alpha t = \alpha (x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, además $\alpha x-\alpha y = \alpha (x - y) = \alpha\cdot 0 = 0$ y $\alpha+3\alpha z = \alpha (x + 3z) = \alpha\cdot 0 = 0$. Luego, $\alpha t \in T$.

      Así, por i), ii) y iii) tenemos que $T \leq \mathbb{R}^3$.

2. Estudie que condiciones debe cumplir $a \in \mathbb{R}$ para que el vector $t_a = (2, 3, a)$ sea combinación lineal de los vectores $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 1)$ y $w_a = (-1, 1, a^2 - 5)$.

   Solución.

   Supongamos que t_a es combinación lineal de los vectores u, v y w_a, entonces existen $x, y, z \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(2, 3, a) = x (1, 1, 1) + y (1, 2, 1) + z \left(-1, 1, a^2 - 5\right).$$

Lo que se traduce en el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 2 \\ x+2y+z &=& 3 \\ x+y+\left(a^2-5\right)z &=& a \end{array}\right|$$

Ahora bien, matricialmente tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2-5 & a \end{array}\right] \underset{L_{31}(-1)}{\xrightarrow{L_{21}(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_{12}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & (a+2)(a-2) & a-2 \end{array}\right] \tag{1}$$

Caso 1: Si reemplazamos $a=-2$ en (1) tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Es decir, el sistema no admite solución. Por tanto, si $a=-2$ entonces t_{-2} no es combinación lineal de los vectores u, v y w_{-2}.

Caso 2: Si reemplazamos $a=2$ en (1) tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Luego, $x-2z=1 \Rightarrow x=1+3z$ e $y+2z=1 \Rightarrow y=1-2z$ con $z \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$(2,3,2) = (1+3z)(1,1,1) + (1-2z)(1,2,1) + z(-1,1,-1), \ \forall z \in \mathbb{R}.$$

Es decir, si $a=2$ entonces t_2 es combinación lineal de los vectores u, v y w_2.

Caso 3: Si $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq \pm 2$ en (1) tenemos:

$$\xrightarrow{L_3\left(\frac{1}{(a+2)(a-2)}\right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array}\right] \underset{L_{23}(-2)}{\xrightarrow{L_{13}(3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a+5}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array}\right]$$

Luego, $x=\frac{a+5}{a+2}$, $y=\frac{a}{a+2}$ y $z=\frac{1}{a+2}$. Es decir, si $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq \pm 2$ entonces t_a es combinación lineal de los vectores u, v y w_a.

De manera más general, podemos afirmar que t_a es combinación lineal de los vectores u, v y w_a para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

3. Demuestre que el conjunto de polinomios $\left\{1, 1+t, (1+t)^2, (1+t)^3\right\}$ genera $\mathbb{R}_3[t]$. Escriba el polinomio $2-3t+t^2+2t^3$ como combinación lineal de los elementos de A.

Solución.

Un elemento genérico de $\mathbb{R}_3[t]$ es de la forma $a+bt+ct^2+dt^3$. Luego, tenemos la combinación lineal:

$$\begin{aligned} a+bt+ct^2+dt^3 &= x\cdot 1 + y(1+t) + z(1+t)^2 + w(1+t)^3 \\ &= (x+y+z+w) + (y+2z+3w)\,t + (z+3w)\,t^2 + wt^3 \end{aligned}$$

Luego,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 3 & b \\ 0 & 0 & 1 & 3 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right] \underset{L_{34}(-3)}{\overset{\substack{L_{14}(-1)\\ L_{24}(-3)}}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a-d \\ 0 & 1 & 2 & 0 & b-3d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c-3d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right]$$

$$\underset{L_{23}(-2)}{\overset{L_{13}(-1)}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a-c+2d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b-2c+3d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c-3d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right] \overset{L_{12}(-1)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a-b+c-d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b-2c+3d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c-3d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right]$$

Luego, los escalares son $x=a-b+c-d$, $y=b-2c+3d$, $z=c-3d$ y $w=d$. Comparando el polinomio $2-3t+t^2+2t^3$ con el polinomio genérico de $\mathbb{R}_3[t]$ vemos que $a=2$, $b=-3$, $c=1$ y $d=2$, por lo que $x=4$, $y=1$, $z=-5$ y $w=2$. Así,

$$2-3t+t^2+2t^3 = 4\cdot 1 + 1(1+t) - 5(1+t)^2 + 2(1+t)^3.$$

4. Dado el subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ siguiente:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a+b-d & 2a+c \\ a-b & 3a-b-c-2d \end{bmatrix} ; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

   a) Encuentre el conjunto de generadores de W.

   b) Use (a) para obtener un conjunto de generadores linealmente independientes escalonados de W.

Solución.

   a) Tenemos:

$$\begin{bmatrix} a+b-d & 2a+c \\ a-b & 3a-b-c-2d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

   Luego, un conjunto de generadores de W es:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) Para el conjunto de generadores linealmente independientes escalonados tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \underset{L_{31}(1)}{\xrightarrow{L_{21}(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{32}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_{42}(-2)}{\xrightarrow{\substack{L_{12}(-2) \\ L_{32}(-1)}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{43}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, el conjunto de generadores linealmente independientes escalonados es:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Puntaje: $(6+6)+(18)+(15)+(15)=60$ Puntos.