Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Examen Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Joan Manuel Molina, Marcia Molina, Alex Sepúlveda.

04 de Enero de 2011.

Instrucciones: *Debe responder la evaluación de manera ordenada y detallada, utilizando sólo el cuadernillo que le ha sido entregado. No se responderán consultas pues, la redacción es suficientemente clara.* **No está permitido el uso de calculadora o celular.**

1. Considere el número complejo $z = -|1+i| + |1-i|\,i$,

   a) Calcule z^{30}.

   b) Encuentre $w \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot w = -2$.

   c) Encuentre todos los $u \in \mathbb{C}$ tal que $u^3 = w$.

Solución.

a) Como $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ y $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$, el complejo z se escribe como $z = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$. Para calcular z^{30}, pasamos z a su forma polar. Tenemos $|z| = 2$ y $\theta_z = \frac{3\pi}{4}$, con esto $z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$. Luego,

$$\begin{aligned}
z^{30} &= 2^{30}\left[\cos\left(\frac{30\cdot 3\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{30\cdot 3\pi}{4}\right)\right]\\
&= 2^{30}\left[\cos\frac{45\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{45\pi}{2}\right]\\
&= 2^{30}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+11\cdot 2\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+11\cdot 2\pi\right)\right]\\
&= 2^{30}\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right]\\
&= 2^{30} i.
\end{aligned}$$

b) De $z \cdot w = -2$ tenemos,

$$w = \frac{-2}{z} = -2\cdot z^{-1} = -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{2}i}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

c) Encontrar todos los $u \in \mathbb{C}$ tales que $u^3 = w$ es encontrar las raíces cúbicas de w. Por tanto, pasamos w a la forma polar, tenemos $|w| = 1$ y $\theta_w = \frac{\pi}{4}$. Luego, las raíces cúbicas de w están dadas por $u_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$, con $k = 0, 1, 2$. Es decir,

$$\begin{aligned}
k = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_0 = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right),\\
k = 1 \quad &\Rightarrow \quad u_1 = \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\\
k = 2 \quad &\Rightarrow \quad u_2 = \left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{17\pi}{12}\right).
\end{aligned}$$

2. Descomponga en fracciones parciales $\dfrac{4X^3+6X^2+5X+33}{(X^2+2X+5)(X^2+X-2)}$.

Solución.

Como el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador podemos escribir inmediatamente que:

$$\begin{aligned}
\frac{4X^3+6X^2+5X+33}{(X^2+2X+5)(X^2+X-2)} &= \frac{4X^3+6X^2+5X+33}{(X^2+2X+5)(X-1)(X+2)}\\
&= \frac{A}{X-1} + \frac{B}{X+2} + \frac{CX+D}{X^2+2X+5}.
\end{aligned}$$

Multiplicando por $(X^2+2X+5)(X-1)(X+2)$ y ordenando adecuadamente obtenemos:

$$\begin{aligned}
4X^3+6X^2+5X+33 &= (A+B+C)X^3 + (4A+B+2D)X^2\\
&\quad + (9A+3B-2C+D)X + (10A-5B-2D),
\end{aligned}$$

de donde, igualando coeficientes tenemos el sistema lineal:

$$\left.\begin{aligned}
A+B+C &= 4\\
4A+B+2D &= 6\\
9A+3B-2C+D &= 5\\
10A-5B-2D &= 33
\end{aligned}\right|$$

cuya solución es: $A = 2$, $B = -1$, $C = 3$ y $D = -4$. Por tanto,

$$\frac{4X^3+6X^2+5X+33}{(X^2+2X+5)(X^2+X-2)} = \frac{2}{X-1} - \frac{1}{X+2} + \frac{3X-4}{X^2+2X+5}.$$

3. Determine si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifique adecuadamente su respuesta.

a) Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se tiene que $\frac{1}{2}(A + A^t)$ es simétrica.

b) Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, con $A \neq 0$, existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A \cdot B = \mathbb{I}_n$.

c) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son matrices tales que $A \cdot B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

Solución.

a) Verdadero. En efecto,

$$\left[\frac{1}{2}\left(A + A^t\right)\right]^t = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right)^t = \frac{1}{2}\left(A^t + \left(A^t\right)^t\right) = \frac{1}{2}\left(A^t + A\right) = \frac{1}{2}\left(A + A^t\right).$$

b) Falso, como contraejemplo podemos tomar $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$.

c) Falso, como contraejemplo podemos tomar $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Diagonalice la matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Solución

Para el polinomio característico debemos calcular $\det\left(M - \lambda \mathbb{I}_3\right)$, es decir,

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{C_{13}(1)}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{L_{31}(-1)}{=} (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda(1-\lambda)^2.
\end{aligned}$$

Por tanto, los valores propios asociados a M son $\lambda = 1$ de multiplicidad doble y $\lambda = 0$ de multiplicidad simple. Para los vectores propios debemos resolver $\left(M - \lambda \mathbb{I}_3\right)\vec{v} = \vec{0}$:

Caso $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned}
\left(M - (1)\,\mathbb{I}_3\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \underset{L_{31}(-2)}{\overset{L_{21}(-1)}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De donde, $x - z = 0 \Rightarrow x = z$ con $z \in \mathbb{R}$, por tanto, $S_{\lambda=1} = \{(z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,1), (0,1,0) \rangle$ y $\dim(S_{\lambda=1}) = 2$.

Caso $\lambda = 0$:

$$(M - (0)\,\mathbb{I}_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_{31}(-2)}{\xrightarrow{L_{21}(-2)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde, $x - \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow z = 2x$ e $y - \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow z = 2y$, por tanto, $S_{\lambda=0} = \{(x, x, 2x), x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,2) \rangle$ y $\dim(S_{\lambda=0}) = 1$.

Como la dimensión de cada subespacio S_λ coincide con la multiplicidad de su valor propio asociado concluimos que la matriz M es diagonalizable. Una base diagonalizante de T es $D = \{(1,0,1), (0,1,0), (1,1,2)\}$. La matriz P es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

que tiene por inversa:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y satisface,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Puntaje: $(15) + (15) + (15) + (15) = 60$ Puntos.