Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°9 Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Marcia Molina, Floridemia Salazar, Alex Sepúlveda.

28 de Octubre de 2009.

Problemas.

1. Considere las matrices: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

   Determine:

   a) $A^t + B$. b) $2A \cdot C$. c) A^{-1}.

2. Encuentre condiciones sobre $\alpha \in \mathbb{R}$ para que la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha+1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

   sea invertible y halle A^{-1} si $\alpha = -1$.

Solución.

1. a) $A^t + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   b) $2AC = 2\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 18 \\ -6 & 6 \\ 8 & -14 \end{bmatrix}$.

   c) Para A^{-1} tenemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{31}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_{23}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_{31}(1)}{\xrightarrow{L_{21}(-2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_{23}(5)}{\xrightarrow{L_{13}(-2)}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{23}(-1)} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{rrr} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

2. Para el análisis pedido tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha+1 & 1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{12}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha+1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha+1 & 1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_{21}(-(\alpha+1))} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha+1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha(\alpha+2) & -1 & 1 & -(\alpha+1) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{1}$$

de donde, vemos tres casos:

Caso 1: Si $\alpha = 0$ en (1) tenemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

lo que indica que A no es invertible.

Caso 2: Si $\alpha = -2$ en (1) tenemos:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{32}(-2)} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right],$$

de donde vemos que A no es invertible.

Caso 3: Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -2$ en (1) tenemos:

$$\underset{L_3\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\xrightarrow{L_2\left(\frac{-1}{\alpha(\alpha+2)}\right)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \alpha+1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha(\alpha+2)} & \frac{-1}{\alpha(\alpha+2)} & \frac{\alpha+1}{\alpha(\alpha+2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{array}\right], \tag{2}$$

lo que indica que A es invertible.

Para la inversa si $\alpha = -1$ tenemos de (2):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \underset{L_{23}(1)}{\xrightarrow{L_{13}(-1)}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right],$$

por tanto:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$