Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°8 Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Marcia Molina, Floridemia Salazar, Alex Sepúlveda.

30 de Septiembre de 2009.

Problema.

Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z,t) = (x-y, y+z, t-2y-2z)$

1. Pruebe que f es una aplicación lineal.
2. Encuentre el núcleo de f y la base escalonada de este subespacio.
3. Encuentre la base escalonada y la dimensión de la imagen de f.

Solución.

1. Sean $u = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ dos vectores de $\mathbb{R}^4$, por tanto, su suma $u + v \in \mathbb{R}^4$. Luego,

$$\begin{aligned}
f(u+v) &= f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, t_1+t_2) \\
&= (x_1+x_2-(y_1+y_2), y_1+y_2+z_1+z_2, t_1+t_2-2(y_1+y_2)-2(z_1+z_2)) \\
&= (x_1-y_1+x_2-y_2, y_1+z_1+y_2+z_2, t_1-2y_1-2z_1+t_2-2y_2-2z_2) \\
&= (x_1-y_1, y_1+z_1, t_1-2y_1-2z_1) + (x_2-y_2, y_2+z_2, t_2-2y_2-2z_2) \\
&= f(x_1, y_1, z_1, t_1) + f(x_2, y_2, z_2, t_2) \\
&= f(u) + f(v).
\end{aligned}$$

Sea $\alpha \in \mathbb{K}$ y $w = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, así $\alpha w \in \mathbb{R}^3$. Luego,

$$\begin{aligned}
f(\alpha w) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha t) \\
&= (\alpha x - \alpha y, \alpha y + \alpha z, \alpha t - 2\alpha y - 2\alpha z) \\
&= \alpha (x-y, y+z, t-2y-2z) \\
&= \alpha f(x, y, z, t) \\
&= \alpha f(w).
\end{aligned}$$

Por tanto, $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z,t) = (x-y, y+z, t-2y-2z)$ es una aplicación lineal.

2. Como el núcleo de la aplicación f corresponde a todos los $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tal que $f(x, y, z, t) = (0, 0, 0)$ tenemos que $x - y = 0$ y $y + z = 0$, $t - 2y - 2z = 0$, de donde, $x = -z$, $y = -z$, $t = 0$. Por tanto, $N(f) = \{(-z, -z, z, 0), z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, -1, 0) \rangle$ y con esto, $\dim(N(f)) = 1$.

3. Por su parte, si $v \in Im(f) \Rightarrow v = x(1, 0, 0) + y(-1, 1, -2) + z(0, 1, -1) + t(0, 0, 1)$. Por tanto, $Im(f)$ es generado por el conjunto de vectores

$$\{(1, 0, 0), (-1, 1, -2), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\}.$$

Al escalonar estos generadores obtenemos que $Im(f) = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle = \mathbb{R}^3$, luego $\dim(Im(f)) = 3$.