Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°7 Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Marcia Molina, Floridemia Salazar, Alex Sepúlveda.

11 de Septiembre de 2009.

Problema.

En $\mathbb{R}_3[X]$ considere los subespacios S y T definidos por:

$$S = \left\{3a - b + (9a - 6b)X + (-3a + 4b)X^2 + (3a - b)X^3; a, b \in \mathbb{R}\right\},$$

$$T = \left\langle 2 - 2X + 4X^2 + 6X^3, 3 - X + 6X^2 + 5X^3 \right\rangle.$$

1. Encuentre la base escalonada de S, T, $S + T$, $S \cap T$ y sus dimensiones.
2. Estudie si $S \oplus T = \mathbb{R}_3[X]$.

Solución.

1. Tenemos que:

$$T = \langle (2, -2, 4, 6), (3, -1, 6, 5) \rangle$$
$$S = \langle (3, 9, -3, 3), (-1, -6, 4, -1) \rangle$$

Luego, para la base escalonada de S tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -6 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{21}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{12}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2(-\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la base escalonada de S es $B_S = \{1 + 2X^2 + X^3, X - X^2\}$ y $\dim(S) = 2$.

Por su parte, parala base escalonada de T:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{21}(3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Así, la base escalonada de T es $B_T = \{1 + 2X^2 + X^3, X - 2X^3\}$ y $\dim(T) = 2$.

Finalmente, la base escalonada para $S + T$ queda como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{23}(1)]{L_{13}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

La base escalonada de $S + T$ es $B_{S+T} = \{1 + 5X^3, 1 - 2x^3, X^2 - 2X^3\}$ y $\dim(S + T) = 3$. Además, la base de $S \cap T$ es $B_{S\cap T} = \{1 + 2X^2 + X^3\}$ y $\dim(S \cap T) = 1$.

2. Como $\dim(S \cap T) = 1$ se tiene que $\mathbb{R}_3[X]$ no es suma directa de S y T.