Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°6 Álgebra (IME006) Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Marcia Molina, Floridemia Salazar, Alex Sepúlveda.

19 de Agosto de 2009.

1. Resuelva el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{rcr|} x-3y+z & = & -2 \\ 2x+y-z & = & 6 \\ 4x-5y+z & = & 2 \\ 3x-2y & = & 4 \\ \hline \end{array}$$

Solución.

El sistema escrito en forma matricial queda como:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \\ 4 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_{41}(-3)]{\substack{L_{21}(-2)\\ L_{31}(-4)}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & 10 \\ 0 & 7 & -3 & 10 \\ 0 & 7 & -3 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[L_{42}(-1)]{L_{32}(-1)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2(\frac{1}{7})} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{12}(3)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

de donde $x-\frac{2}{7}z=\frac{16}{7}$ e $y-\frac{3}{7}z=\frac{10}{7}$. Luego, el conjunto solución es:

$$S=\left\{\left(\frac{16}{7}+\frac{2}{7}z, \frac{10}{7}+\frac{3}{7}z, z\right); z\in\mathbb{R}\right\}.$$

2. Estudie la familia de sistemas y halle las soluciones cuando éstan existan:

$$\begin{array}{rcr|} x-2y+3z & = & 1 \\ 2x+ky+6z & = & 6 \\ -x+3y+(k-3)\,z & = & 0 \\ \hline \end{array} \tag{1}$$

Solución.

El sistema queda escrito como:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{array}\right] \underset{L_{31}(1)}{\xrightarrow{L_{21}(-2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_{23}(-(k+4))}{\xrightarrow{L_{13}(2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3+2k & 3 \\ 0 & 0 & -k\,(k+4) & -k \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{23}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3+2k & 3 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k\,(k+4) & -k \end{array}\right] \tag{2}$$

Por tanto, distinguimos tres casos:

Caso 1: Si reemplazamos $k = 0$ en (2), tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

es decir, $x + 3z = 3$ e $y = 1$. Luego, el sistema admite infinitas soluciones dadas por:

$$S = \{(3 - 3z, 1, z)\,;\, z \in \mathbb{R}\}.$$

Caso 2: Si reemplazamos $k = -4$ en (2), tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

De acuerdo a la última fila, el sistema no admite solución.

Caso 3: Si $k \neq 0$ y $k \neq -4$ en (2), tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3+2k & 3 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k\,(k+4) & -k \end{array}\right] \xrightarrow{L_3\left(\frac{-1}{k(k+4)}\right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3+2k & 3 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+4} \end{array}\right]$$

$$\underset{L_{23}(-k)}{\xrightarrow{L_{13}(-(3+2k))}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{k+9}{k+4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{k+4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+4} \end{array}\right].$$

Es decir, el sistema admite una única solución dada por:

$$S = \left\{x = \frac{k+9}{k+4}, y = \frac{4}{k+4}, z = \frac{1}{k+4}; k \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}\right\}.$$

Conclusión final:

a) Si $k = 0$ el sistema (1) admite infinitas soluciones dadas por:

$$S = \{(3 - 3z, 1, z)\,; z \in \mathbb{R}\}\,.$$

b) Si $k = -4$ el sistema (1) no admite solución.

c) Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}$, el sistema (1) admite una única solución dada por:

$$S = \left\{x = \frac{k+9}{k+4}, y = \frac{4}{k+4}, z = \frac{1}{k+4}; k \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\}\right\}.$$