UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIENCIAS Y ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Solución Prueba Global II
Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Marcia Molina, Floridemia Salazar, Alex Sepúlveda.

23 de Noviembre de 2009.

1. Defina una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de manera que ele núcleo de T esté constituido por los vectores de la forma $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $2x - 3y + z = 0$.

$\boxed{\text{Solución.}}$

Si $2x - 3y + z = 0$, entonces $z = 3y - 2x$, luego:

$$(x, y, z) = (x, y, 3y - 2x) = x\,(1, 0, -2) + y\,(0, 1, 3)\,.$$

Por tanto, $N\,(T) = \langle (1, 0, -2)\,, (0, 1, 3) \rangle$. Con esto, podemos considerar como base para $\mathbb{R}^3$ al conjunto $B = \{(1, 0, -2)\,, (0, 1, 3)\,, (0, 0, 1)\}$. Para la aplicación lineal tenemos, $T\,(1, 0, -2) = (0, 0)$, $T\,(0, 1, 3) = (0, 0)$ y fijamos arbitrariamente $T\,(0, 0, 1) = (1, -1)$. Por otro lado, escribiendo $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ como combinación lineal de los elementos de B tenemos:

$$(x, y, z) = \alpha\,(1, 0, -2) + \beta\,(0, 1, 3) + \gamma\,(0, 0, 1)\,,$$

de donde obtenemos $\alpha = x$, $\beta = y$ y $\gamma = 2x - 3y + z$. Por tanto,

$$(x, y, z) = x\,(1, 0, -2) + y\,(0, 1, 3) + (2x - 3y + z)\,(0, 0, 1)\,.$$

Aplicando T a la igualdad anterior y considerando la imágenes de la base B mediante la aplicación:

$$\begin{aligned} T\,(x, y, z) &= xT\,(1, 0, -2) + yT\,(0, 1, 3) + (2x - 3y + z)\,T\,(0, 0, 1) \\ &= x\,(0, 0) + y\,(0, 0) + (2x - 3y + z)\,T\,(1, -1) \\ &= (2x - 3y + z, 3y - 2x - z)\,. \end{aligned}$$

2. Encuentre la matriz X tal que se cumpla $AX + B = 0$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución.

Si $AX + B = 0$, entonces $X = -A^{-1}B$, por lo que, necesitamos invertir la matriz A. Para ello:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_{31}(1)}{\overset{L_{21}(-2)}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_{3}(-1)}{\overset{L_{23}(1)}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \underset{L_{2}\left(\frac{1}{2}\right)}{\overset{L_{12}\left(\frac{1}{2}\right)}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Luego, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Por tanto,

$$X = -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Determine los posibles valores de $a \in \mathbb{R}$ de tal forma que el siguiente determinante sea nulo:
$$\begin{vmatrix} 1+a & a & 2a+a^2 \\ a+2a^2 & 2a^2 & 4a^2+3a^3 \\ 3a+5a^2 & 5a^2 & 10a^2+7a^3 \end{vmatrix}.$$

Solución.

Aplicando las propiedades tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & 2a+a^2 \\ a+2a^2 & 2a^2 & 4a^2+3a^3 \\ 3a+5a^2 & 5a^2 & 10a^2+7a^3 \end{vmatrix} \underset{L_{32}(-2)}{\overset{L_{12}(-1)}{=}} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 2a^2 & 3a^3 \\ 3a & 5a^2 & 7a^3 \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2a & 3a \\ 3a & 5a & 7a \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_{32}(-1)}{\overset{L_{21}(-1)}{=}} a^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_{31}(-1)}{=} a^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = a^5 \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, el determinante es nulo para todo $a \in \mathbb{R}$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal en la cual 2 y -3 son sus valores propios y cuyos vectores propios correspondientes son $(3, -2)$ y $(1, 1)$. Encuentre $f(x, y)$.

Solución.

Tenemos que $f(3,-2) = 2(3,-2) = (6,-4)$ y $f(1,1) = -3(1,1) = (-3,-3)$. Por otro lado,

$$(x,y) = \alpha(3,-2) + \beta(1,1),$$

implica $\alpha = \dfrac{x-y}{5}$ y $\beta = \dfrac{2x+3y}{5}$. Así,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x-y}{5} f(3,-2) + \frac{2x+3y}{5} f(1,1) \\ &= \frac{x-y}{5}(6,-4) + \frac{2x+3y}{5}(-3,-3) \\ &= (-3y, -2x-y). \end{aligned}$$