Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Prueba N°6
Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Marcia Molina, Floridemia Salazar, Alex Sepúlveda.

11 de Noviembre de 2009.

1. *a*) Halle dos matrices no invertibles de orden dos cuya suma sea una matriz invertible.

   b) Halle dos matrices invertibles de orden dos cuya suma sea no invertible.

   c) Si $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Encuentre la matriz B.

Solución.

a) Podemos tomar, por ejemplo, las matrices $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ que no son invertibles pues $\det(M) = \det(N) = 0$. Pero, $M + N = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ es invertible, pues $\det(M+N) = -6 \neq 0$.

b) Por ejemplo, las matrices $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ son invertibles pues $\det(P) = 3 \neq 0$ y $\det(Q) = -2 \neq 0$. Pero, $P + Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ no es invertible, pues $\det(P+Q) = 0$.

c) Llamemos $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, por tanto, tenemos:

$$(AB)^{-1} = C \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = C,$$

Multiplicando a la derecha por A tenemos:

$$B^{-1} = CA.$$

Lo que implica,

$$B = (CA)^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}C^{-1}.$$

Un sencillo calculo permite determinar que $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{4}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$. Por tanto,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{4}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{16}{13} \end{bmatrix}$$

2. Encuentre de manera factorizada, utilizando las propiedades, el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}.$$

Solución.

Tenemos:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_{12}(1) \\ C_{13}(1)}}{\underset{C_{14}(1)}{\xrightarrow{\hspace{1em}} =}} \begin{vmatrix} a^2+2ab+b^2 & ab & ab & b^2 \\ a^2+2ab+b^2 & a^2 & b^2 & ab \\ a^2+2ab+b^2 & b^2 & a^2 & ab \\ a^2+2ab+b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2 & b^2 & ab \\ 1 & b^2 & a^2 & ab \\ 1 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_{21}(-1) \\ L_{31}(-1)}}{\underset{L_{41}(-1)}{\xrightarrow{\hspace{1em}} =}} (a+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 0 & a(a-b) & b(b-a) & -b(b-a) \\ 0 & b(b-a) & a(a-b) & b(a-b) \\ 0 & 0 & 0 & (a-b)(a+b) \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)^3 (a-b)^3 \begin{vmatrix} a & -b & b \\ -b & a & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a+b)^3 (a-b)^3 \begin{vmatrix} a & -b \\ -b & a \end{vmatrix} = (a+b)^4 (a-b)^4.$$

3. Diagonalice, si es posible, la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -6 & 3 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

En caso de ser diagonalizable, encuentre la matriz invertible P y la matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP$.

Solución.

Calculando $\det(A - \lambda \mathbb{I}_3) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 & -2 \\ -6 & 3-\lambda & -2 \\ 6 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ tenemos que el polinomio característico es $p(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$. Por tanto, los valores propios son $\lambda = 1$ de multiplicidad 2 y $\lambda = -1$ de multiplicidad 1.

Caso $\lambda = 1$:

$$(A - (1)\mathbb{I}_3) = \begin{bmatrix} -6 & 2 & -2 \\ -6 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_{31}(1)}{\xrightarrow{L_{21}(-1)}} \begin{bmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De donde, $3x - y + z = 0 \Rightarrow y = 3x + z$, por tanto,

$$S_1 = \{(x, 3x + z, z), y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,3,0), (0,1,1) \rangle$$

y $\dim(S_1) = 2$.

Caso $\lambda = -1$:

$$(A - (-1)\mathbb{I}_3) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix} \underset{L_3(\frac{1}{2})}{\overset{L_{13}(1)}{\overset{L_{23}(1)}{\longrightarrow}}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_2(\frac{1}{2})}{\overset{L_1(\frac{1}{2})}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_{31}(-3)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{L_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde, $x + z = 0$ e $y + z = 0$, lo que implica $x = -z$ e $y = -z$, por tanto, $S_{-1} = \{(-z, -z, z), z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, -1) \rangle$ y $\dim(S_{-1}) = 1$.

Como la dimensión de cada subespacio S_λ coincide con la multiplicidad de su valor propio asociado concluimos que la matriz M es diagonalizable.

Finalmente, las matrices P y D son:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$