Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Prueba N°5
Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Marcia Molina, Floridemia Salazar, Alex Sepúlveda.

07 de Octubre de 2009.

1. Considere los siguiente subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t - 3y = 0, z - x + 2y = 0\right\}$$

y

$$W = \langle (1, 1, -2, -1), (2, 1, -1, 3), (1, 1, -1, 2) \rangle .$$

a) Encuentre las bases escalonadas de U y W.

b) Encuentre la base escalonada de $U \cap W$ y su dimensión.

c) Encuentre la base escalonada de $U + W$ y su dimensión.

d) Indique si la suma $U + W$ es directa.

Solución.

a) Para el subespacio U tenemos: $x + t - 3y = 0 \Rightarrow t = 3y - x$ y $z - x + 2y = 0 \Rightarrow z = x - 2y$. Con esto,

$$(x, y, x - 2y, 3y - x) = x (1, 0, 1, -1) + y (0, 1, -2, 3), \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Luego, la base escalonada de U es $B_U = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, -2, 3)\}$ y $\dim (U) = 2$.
Para el subespacio W tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{41}(-1)]{\substack{L_{21}(-2)\\ L_{31}(-4)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3(-1)]{L_{12}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{32}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\left(\frac{1}{2}\right)]{L_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{43}(-1)]{\substack{L_{13}(-1)\\ L_{23}(3)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, la base escalonada de W es $B_W = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 4), (0, 0, 1, 3)\}$ y $\dim (W) = 3$.

b) Sea $\vec{v} \in V \cap W$, entonces,

$$\vec{v} = \alpha(1,0,-1,1) + \beta(0,1,-2,3) = a(1,0,0,1) + b(0,1,0,4) + c(0,0,1,2)\,. \quad (1)$$

A partir de esto tenemos,

$$\begin{aligned} \alpha &= a & (2)\\ \beta &= b & (3)\\ \alpha - 2\beta &= c & (4)\\ -\alpha + 3\beta &= a + 4b + 3c & (5) \end{aligned}$$

Reemplazando (2), (3) y (4) en (5) obtenemos $\alpha = \beta$, lo que sustituido en (1) resulta:

$$\vec{v} = \alpha(1,0,1,-1) + \alpha(0,1,-2,2) = \alpha(1,1,-1,2)\,. \quad (6)$$

Por tanto, $V \cap W = \langle(1, 1-1, 2)\rangle$ y $\dim(U \cap W) = 1$.

c) Para la suma de los subespacios tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_{42}(-1)}{\xrightarrow{L_{31}(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_{43}(2)\\ L_{53}(1)}}{\xrightarrow{\substack{L_{13}(1)\\ L_{23}(-2)}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_4\left(\frac{1}{5}\right)}{\xrightarrow{L_3(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_{34}(2)\\ L_{54}(-5)}}{\xrightarrow{\substack{L_{14}(-1)\\ L_{24}(1)}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, $B_{V+W} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ y $\dim(V+W) = 4$

d) Como $\dim(U \cap W) = 1$ tenemos que $U \cap W \neq \left\{\vec{0}\right\}$, por tanto, la suma no es directa.

2. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z,t) = (x + 3y + z + 7t, z + 2t, 2x + 6y + z + 12t)$.

   a) Encuentre las bases escalonadas del núcleo y la imagen de f y sus dimensiones.

   b) Estudie inyectividad y sobreyectividad de f.

Solución.

a) Como el núcleo de f está constituido por todos los $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tal que $f(x,y,z,t) = (0,0,0)$ tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + z + 7t &= 0 \\ z + 2t &= 0 \\ 2x + 6y + 2z + 12t &= 0 \end{aligned}\right|$$

es decir,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{12}(-1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 12 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_{31}(-2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{32}(-2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

De donde, $x + 3y - 5t = 0$ y $z + 2t = 0$. Luego:

$$N(t) = \{(-3y - 5t, y, -2t, t)\,; y, t \in \mathbb{R}\} = \{(-3, 1, 0, 0), (-5, 0, -2, 1)\}.$$

Con esto,

$$\left[\begin{array}{cccc} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2\left(-\frac{1}{5}\right)}{\xrightarrow{L_1\left(-\frac{1}{3}\right)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{L_{21}(-1)} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_{12}(1)} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{L_2(3)} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right].$$

es decir, la base escalonada del núcleo es $B_{N(f)} = \left\{\left(1, 0, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right), \left(0, 1, \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)\right\}$ y $\dim(N(f)) = 2$.

Para la base escalonada del conjunto imagen tenemos:

$$(x + 3y + z + 7t, z + 2t, 2x + 6y + z + 12t) = x(1, 0, 2) + y(3, 0, 6) + z(1, 1, 1) + t(7, 2, 12).$$

Con esto,

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 12 \end{array}\right] \underset{L_{31}(-7)}{\xrightarrow{L_{21}(-1)}} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{32}(-2)} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por tanto, la base escalonada del conjunto imagen es $B_{Im(f)} = \{(1, 0, 2), (0, 1, -1)\}$ y $\dim(Im(f)) = 2$.

b) Como $\dim(N(f)) = 2 \neq 0$ tenemos que f no es inyectiva. De igual forma, como $\dim(Im(f)) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^3)$ concluimos que f no es sobreyectiva.

3. Encuentre $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal tal que $N(f) = \langle(2, -1)\rangle$

Solución.

De acuerdo al enunciado tenemos que $f(2, -1) = (0, 0)$ y podemos considerar $f(1, 0) = (a, b)$, donde a y b no son simultáneamente nulos. Hemos tomado el vector $(1, 0)$ de manera arbitraria, pues se puede elegir cualquier otro que forme una base con $(2, -1)$.

4. Considere las bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ siguientes: $B = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ y $C = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$. Sabiendo que $(f; B, C) = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 7 \end{array}\right]$. Determine

$f(x,y,z)$.

Solución.

Para las imágenes de f en la base B tenemos:

$$\begin{aligned}
f(1,1,0) &= \boxed{0}(1,0,1)+\boxed{-1}(1,0,0)+\boxed{3}(1,1,1)=(2,3,3)\\
f(1,1,1) &= \boxed{-2}(1,0,1)+\boxed{-1}(1,0,0)+\boxed{7}(1,1,1)=(4,7,5)\\
f(0,1,1) &= \boxed{-4}(1,0,1)+\boxed{0}(1,0,0)+\boxed{7}(1,1,1)=(3,7,3)
\end{aligned}$$

Ahora bien, para un vector $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tenemos:

$$(x,y,z)=\alpha(1,1,0)+\beta(1,1,1)+\gamma(0,1,1),$$

es decir,

$$\left.\begin{aligned}
\alpha+\beta &= x\\
\alpha+\beta+\gamma &= y\\
\beta+\gamma &= z
\end{aligned}\right|$$

cuya solución es $\alpha=y-z$, $\beta=x-y+z$ y $\gamma=y-x$. Por tanto, $(x,y,z)=(y-z)(1,1,0)+(x-y+z)(1,1,1)+(y-x)(0,1,1)$. Luego,

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= f((y-z)(1,1,0))+f((x-y+z)(1,1,1))+f((y-x)(0,1,1))\\
&= (y-z)f(1,1,0)+(x-y+z)f(1,1,1)+(y-x)T(0,1,1)\\
&= (y-z)(2,3,3)+(x-y+z)(4,7,5)+(y-x)(3,7,3)\\
&= (x+y+2z,3y+4z,2x+y+2z).
\end{aligned}$$

Por tanto, la aplicación lineal requerida es:

$$f(x,y,z)=(x+y+2z,3y+4z,2x+y+2z).$$