Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Prueba N°4
Álgebra (IME006)
Ingenierías Civiles

Profesores: María Teresa Alcalde, Raúl Benavides, César Burgueño, Erwin Henríquez, Elizabeth Henríquez, Marcia Molina, Floridemia Salazar, Alex Sepúlveda.

02 de Septiembre de 2009.

1. Dado el polinomio $P(X) = X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 14X + 5$, factorice en $\mathbb{R}[X]$ y en $\mathbb{C}[X]$, sabiendo que $2 - i$ es una de sus raíces.

   Solución.

   Sabemos que si $2 - i$ es raíz de $P(X)$, entonces también lo es $2 + i$. Luego, $P(X)$ es divisible por $(X - (2 - i))(X - (2 + i)) = X^2 - 4X + 5$. Así, podemos escribir:

$$P(X) = \left(X^2 - 4X + 5\right)\left(X^2 - 2X + 1\right) = \left(X^2 - 4X + 5\right)(X - 1)^2 .$$

   Por tanto, la factorización en $\mathbb{R}[X]$ es:

$$P(X) = \left(X^2 - 4X + 5\right)(X - 1)^2 ,$$

   y en $\mathbb{C}[X]$ es:

$$P(X) = (X - (2 - i))(X - (2 + i))(X - 1)^2 .$$

2. Descomponga en fracciones parciales en $\mathbb{R}[X]$: $\dfrac{X^4 + 2X^2 - 8X + 4}{X^3 - 8}$.

   Solución.

   Como el grado del polinomio del numerador es mayor al grado del polinomio del denominador debemos realizar la división respectiva, obteniéndo:

$$\frac{X^4 + 2X^2 - 8X + 4}{X^3 - 8} = X + \frac{2X^2 + 4}{X^3 - 8}.$$

   Luego, podemos escribir:

$$\frac{2X^2 + 4}{X^3 - 8} = \frac{2X^2 + 4}{(X - 2)(X^2 + 2X + 4)} = \frac{A}{X - 2} + \frac{BX + C}{X^2 + 2X + 4}.$$

Multiplicando por $(X-2)(X^2+2X+4)$ y ordenando adecuadamente obtenemos:

$$2X^2+4=(A+B)X^2+(2A-2B+C)X+(4A-2C),$$

de donde, igualando coeficientes obtenemos el sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{rcl} A+B & = & 2 \\ 2A-2B+C & = & 0 \\ 4A-2C & = & 4 \end{array}\right|$$

cuya solución es $A=1$, $B=1$ y $C=0$. Por tanto,

$$\frac{X^4+2X^2-8X+4}{X^3-8}=X+\frac{1}{X-2}+\frac{X}{X^2+2X+4}.$$

3. Dado $W=\{a+bt+ct^2+dt^3\in\mathbb{R}_3[t]\,;\ d=b-a\}$
   a) Pruebe que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[t]$.
   b) Encuentre el conjunto escalonado de generadores de W.

Solución.

a) Debemos mostrar los tres puntos característicos de los subespacios:

i. $W\neq\emptyset$, pues $\vec{0}=0+0t+0t^2+0t^3\in W$.

ii. Sean $\vec{w},\vec{w}'\in W$, es decir, $\vec{w}=a+bt+ct^2+dt^3$ tal que $d=b-a$ y $\vec{w}'=a'+b't+c't^2+d't^3$ tal que $d'=b'-a'$. Luego,

$$\begin{array}{rcl} \vec{w}+\vec{w}' & = & \left(a+bt+ct^2+dt^3\right)+\left(a'+b't+c't^2+d't^3\right) \\ & = & (a+a')+(b+b')t+(c+c')t^2+(d+d')t^3. \end{array}$$

Además, $d+d'=(b-a)+(b'-a')=(b+b')-(a+a')$. Por tanto, $\vec{w}+\vec{w}'\in W$.

iiii. Sea $\vec{w}\in W$, es decir, $\vec{w}=a+bt+ct^2+dt^3$ tal que $d=b-a$ y $\alpha\in\mathbb{K}$, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} \alpha\vec{w}' & = & \alpha\left(a+bt+ct^2+dt^3\right) \\ & = & (\alpha a)+(\alpha b)t+(\alpha c)t^2+(\alpha d)t^3. \end{array}$$

Además, $\alpha d=\alpha(b-a)=\alpha b-\alpha a$, lo que implica que $\alpha w\in W$.

b) Para el conjunto de generadores tenemos:

$$\begin{array}{rcl} a+bt+ct^2+dt^3 & = & a+bt+ct^2+(b-a)t^3 \\ & = & a\left(1-t^3\right)+b\left(t+t^3\right)+ct^2. \end{array}$$

Luego, el conjunto de generadores es:

$$C=\left\{1-t^3,t+t^3,t^2\right\}.$$

Notemos que estos vectores están escalonados, por tanto, es el conjunto de generadores pedido.

4. Determine los valores de a y b para que el vector $\vec{u} = (1, 0, a, b)$ pertenezca al espacio generado por los vectores $(1, 4, -5, 2)$ y $(1, 2, 3, -1)$

$\boxed{\text{Solución.}}$

Tenemos:

$$(1, 0, a, b) = x\,(1, 4, -5, 2) + y\,(1, 2, 3, -1)\,.$$

Luego, tenemos el sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ 4x + 2y & = & 0 \\ -5x + 3y & = & a \\ 2x - y & = & b \end{array}\right|$$

que en forma matricial corresponde a:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & a \\ 2 & -1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[L_{41}(-2)]{\substack{L_{21}(-4)\\ L_{31}(5)}} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 8 & a+5 \\ 0 & -3 & b-2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2(-\frac{1}{2})} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & a+5 \\ 0 & -3 & b-2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_{42}(3)]{\substack{L_{12}(-1)\\ L_{32}(-8)}} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-11 \\ 0 & 0 & b+4 \end{array}\right]$$

Por tanto, para que el sistema admita solución se debe cumplir que: $a - 11 = 0$ y $b + 4 = 0$, es decir, $a = 11$ y $b = -4$.

5. Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial y $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente de V. Estudie la dependencia lineal del conjunto de vectores $\{2\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{w}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\}$

$\boxed{\text{Solución.}}$

Tenemos:

$$\begin{array}{rcl} \alpha\,(2\vec{u} + \vec{v}) + \beta\,(\vec{u} - \vec{w}) + \gamma\,(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) & = & \vec{0} \\ (2\alpha + \beta + \gamma)\,\vec{u} + (\alpha + \gamma)\,\vec{v} + (\gamma - \beta)\,\vec{w} & = & \vec{0}. \end{array}$$

Como $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes tenemos:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2\alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ \alpha + \gamma & = & 0 \\ \gamma - \beta & = & 0 \end{array}\right|$$

Lo que matricialmente corresponde a:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{32}(1)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2(-1)]{L_{31}(-2)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Luego, $\alpha = -\gamma$ y $\beta = \gamma$. Así,

$$-\gamma\left(2\vec{u} + \vec{v}\right) + \gamma\left(\vec{u} - \vec{w}\right) + \gamma\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{0}, \forall \gamma \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, $\{2\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{w}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\}$ es linealmente dependiente.