Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°9
Álgebra (IME006)

Profesores: M. T. Alcalde, R. Benavides, C. Burgueño,
M. Carrillo, F. Salazar, A. Sepúlveda.

12 de Noviembre 2008.

Problema.

Usando las propiedades, calcule los siguientes determinantes,

1. $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c^2 & 3abc \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1+x_4 & x_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1+x_5 \end{vmatrix}$.

Solución.

1. Aplicando las propiedades de los determinantes tenemos,

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c^2 & 3abc \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} bc & -b & a \\ -bc & 2b & -a \\ b^2c & -b^2c & 3ab \end{vmatrix} = a^2b^3c^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ b & -bc & 3b \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^4c^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -c & 3 \end{vmatrix} \underset{L_{32}(1)}{\overset{L_{12}(1)}{=}} a^2b^4c^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2-c & 2 \end{vmatrix} = a^2b^4c^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2-c & 2 \end{vmatrix} = 2a^2b^4c^2.$$

2. Sumándole a la primera columnas las restantes cuatro y extrayendo el término común $1+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$, tenemos,

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1+x_4 & x_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1+x_5 \end{vmatrix} = (1+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 1+x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & x_2 & 1+x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & x_2 & x_3 & 1+x_4 & x_5 \\ 1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1+x_5 \end{vmatrix}.$$

Haciendo ceros en la primera columna, a mediante la primera fila, tenemos que el determinate queda expresado como,

$$(1+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

que desarrollado por la primera columna, permite concluir que,

$$(1+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5.$$