Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°8
Álgebra (IME006)

Profesores: M. T. Alcalde, R. Benavides, C. Burgueño,
M. Carrillo, F. Salazar, A. Sepúlveda.

29 de Octubre 2008.

Problema.

1. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Encuentre A^n, $n \in \mathbb{N}$ y demuestre por inducción que esta propiedad es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal. Considere las bases $B = \{(1,1), (0,1)\}$ y C la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Sabiendo que $(f; B, C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, encuentre,

   a) $f(x, y)$.
   b) $(f^{-1}; C, B)$.
   c) $f^{-1}(u, v)$.

Solución.

1. Calculemos algunas potencias de A que nos permitan conjeturar una formula general

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \\ A^3 &= A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix} \\ A^4 &= A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, postulamos que

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix},$$

siendo ésta, la hiótesis de inducción. Falta entonces, demostrar la veracidad de la afirmación para $n+1$, es decir,

$$A^{n+1} \;=\; \begin{bmatrix} a^{n+1} & (n+1)\,a^{n} \\ 0 & a^{n} \end{bmatrix},$$

En efecto,

$$A^{n+1} \;=\; A^{n}\cdot A = \begin{bmatrix} a^{n} & na^{n-1} \\ 0 & a^{n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{n+1} & (n+1)\,a^{n} \\ 0 & a^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Concluyéndose que la afirmación es válida para todo $n\in\mathbb{N}$.

2. *a*) Considerando las bases B C y la matriz $(f;B,C)$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(1,1) &= \boxed{1}\,(1,0)+\boxed{4}\,(0,1)=(1,4) \\ f(1,0) &= \boxed{1}\,(1,0)+\boxed{3}\,(0,1)=(1,3)\,. \end{aligned}$$

Además, tenemos que $(x,y)=(x-y)\,(1,0)+y\,(1,1)$, por tanto,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x-y)\,f(1,0)+yf(1,1) \\ &= (x-y)\,(1,4)+y\,(1,3) \\ &= (x,3x+y)\,. \end{aligned}$$

b) Sabemos que $(f^{-1};C,B)=(f;B,C)^{-1}$, luego,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{21}(-4)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{2}(-1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_{12}(-1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right].$$

Por tanto,

$$\left(f^{-1};C,B\right) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Considerando las bases C, B y la matriz $(f^{-1};C,B)$ tenemos,

$$\begin{aligned} f^{-1}(1,0) &= \boxed{\text{-3}}\,(1,1)+\boxed{4}\,(1,0)=(1,-3) \\ f^{-1}(0,1) &= \boxed{1}\,(1,1)+\boxed{\text{-1}}\,(1,0)=(0,1)\,. \end{aligned}$$

Además, tenemos que $(u,v)=u\,(1,0)+v\,(0,1)$, por tanto,

$$\begin{aligned} f^{-1}(u,v) &= uf^{-1}(1,0)+vf^{-1}(0,1) \\ &= u\,(1,-3)+v\,(0,1) \\ &= (u,v-3u)\,. \end{aligned}$$