UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIENCIAS Y ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Solución Taller N°7
Álgebra (IME006)

Profesores: M. T. Alcalde, R. Benavides, C. Burgueño,
M. Carrillo, F. Salazar, A. Sepúlveda.

14 de Octubre 2008.

Problema.

Considere la familia de aplicaciones lineales $f_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definidas por:

$$f_\alpha(x,y,z,t) = \left(x, y, 2x + \alpha y + \left(\alpha^2 + \alpha - 2\right) z, 3x + 4y + (3\alpha - 3) z\right).$$

Para los diferentes valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, encuentre:

1. La base escalonada de $N(f_\alpha)$, de la $Im(f_\alpha)$ y sus dimensiones.
2. De acuerdo a su respuesta anterior, indique en cada caso si f_α es inyectiva, epiyectiva o biyectiva.

Solución.

1. Para el conjunto imagen de la aplicación f_α buscamos, en primer lugar, un conjunto de generadores. Para esto, sea $w \in Im(f_\alpha)$, luego,

$$w = x(1,0,2,3) + y(0,1,\alpha,4) + z\left(0,0,\alpha^2+\alpha-2, 3\alpha-3\right).$$

Por tanto, $Im(f_\alpha) = \langle (1,0,2,3), (0,1,\alpha,4), (0,0,\alpha^2+\alpha-2, 3\alpha-3)\rangle$. Con esto, luego de hacer las factorizaciones respectivas, tenemos inmediatamente la matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha & 4 \\ 0 & 0 & (\alpha-1)(\alpha+2) & 3(\alpha-1) \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Caso 1: Si reemplazamos $\alpha = 1$ en (1) tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de donde, la base escalonada de $Im\,(f_1) = \{(1,0,2,3)\,,(0,1,1,4)\}$ y $\dim\,(Im\,(f_1)) = 2$.

Caso 2: Si reemplazamos $\alpha = -2$ en (1) tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3\left(\frac{-1}{9}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{23}(-4)]{L_{13}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

por tanto, la base escalonada de $Im\,(f_{-2}) = \{(1,0,2,0)\,,(0,1,-2,0)\,,(0,0,0,1)\}$ y $\dim\,(Im\,(f_{-2})) = 3$.

Caso 3: Si $\alpha \neq -2$, $\alpha \neq 1$ en (1) entonces,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha & 4 \\ 0 & 0 & (\alpha-1)(\alpha+2) & 3(\alpha-1) \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3\left(\frac{1}{(\alpha-1)(\alpha+2)}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \alpha & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{(\alpha+2)} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_{23}(-\alpha)]{L_{13}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3\alpha}{\alpha+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\alpha+8}{\alpha+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{(\alpha+2)} \end{bmatrix},$$

con esto, la base escalonada para la $Im\,(f_\alpha) = \left\{\left(1,0,0,\frac{3\alpha}{\alpha+2}\right),\left(0,1,0,\frac{\alpha+8}{\alpha+2}\right),\left(0,0,1,\frac{3}{\alpha+2}\right)\right\}$ y $\dim\,(Im\,(f_\alpha)) = 3$.

Por su parte, para el núcleo debemos encontrar todos los $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tal que $f_\alpha\,(x,y,z,t) = (0,0,0,0)$, es decir,

$$\left(x, y, 2x + \alpha y + \left(\alpha^2 + \alpha - 2\right) z, 3x + 4y + (3\alpha - 3)\, z\right) = (0,0,0,0)\,.$$

Ingualando componentes obtenemos inmediatamente que $x = y = 0$ y luego de factorizar $(\alpha-1)(\alpha+2)\,z = 0$, $3\,(\alpha-1)\,z = 0$. Con esto,

Caso 1: Si $\alpha = 1$ tenemos que $N\,(f_1) = \{(0,0,z,t)\,, z,t \in \mathbb{R}\}$. A partir de esto, su base es $B_{N(f_1)} = \{(0,0,1,0)\,,(0,0,0,1)\}$ y $\dim\,(N\,(f_1)) = 2$.

Caso 2: Si $\alpha = -2$ tenemos que $N\,(f_{-2}) = \{(0,0,0,t)\,, t \in \mathbb{R}\}$. Con base $B_{N(f_{-2})} = \{(0,0,0,1)\}$ y $\dim\,(N\,(f_{-2})) = 1$.

Caso 3: Si $\alpha \neq -2$ y $\alpha \neq 1$ tenemos que $N\,(f_\alpha) = \{(0,0,0,t)\,, t \in \mathbb{R}\}$. Su base es $B_{N(f_\alpha)} = \{(0,0,0,1)\}$ y $\dim\,(N\,(f_\alpha)) = 1$.

2. De acuerdo a lo anterior tenemos que,

   - Si $\alpha = 1$ tenemos que f_1 no es inyectiva ni sobreyectiva.
   - Si $\alpha = -2$ tenemos que f_{-2} no es inyectiva ni sobreyectiva.
   - Si $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \neq -2$ y $\alpha \neq 1$ tenemos que f_α no es inyectiva ni sobreyectiva.

   Por tanto, no existe $\alpha \in \mathbb{R}$ para que f_α sea biyectiva.