Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°6
Álgebra (IME006)

Profesores: M. T. Alcalde, R. Benavides, C. Burgueño,
M. Carrillo, F. Salazar, A. Sepúlveda.

09 de Septiembre 2008.

Problema.

Estudie según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el siguiente sistema de ecuaciones lineales y resuélvalo cuando sea posible.

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + ay + z & = & 4 \\ ax + 2y + z & = & 2 \\ x + y + (a+1)\,z & = & 3 \end{array}\right| \tag{1}$$

Solución.

El sistema escrito matricialmente queda como,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & 4 \\ a & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a+1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{31}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 3 \\ a & 2 & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_{31}(-2)]{L_{21}(-a)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 3 \\ 0 & 2-a & 1-a-a^2 & 2-3a \\ 0 & a-2 & -2a-1 & -2 \end{array}\right].$$

$$\xrightarrow{L_{32}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 3 \\ 0 & 2-a & 1-a-a^2 & 2-3a \\ 0 & 0 & -a\,(a+3) & -3a \end{array}\right]. \tag{2}$$

Por tanto, distinguimos cuatro casos de estudio:
Caso 1: Si reemplazamos $a = -3$ en (2), tenemos,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right].$$

Lo que implica que el sistema no admite solución.

Caso 2: Si reemplazamos $a = 0$ en (2), tenemos,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{32}\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Luego, $y + \frac{1}{2}z = 1$, $x + y + z = 3$, de donde $y = 1 - \frac{1}{2}z$ y $x = 2 - \frac{1}{2}z$. Por tanto, el sistema admite infinitas soluciones, dadas por $S = \left\{\left(2 - \frac{1}{2}z, 1 - \frac{1}{2}z, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}$.
Caso 3: Si reemplazamos $a = 2$ en (2), tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{32}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Por tanto, el sistema no admite solución.
Caso 4: Si $a \neq -3$, $a \neq 0$, $a \neq 2$, en (2), entonces

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 3 \\ 0 & 2-a & 1-a-a^2 & 2-3a \\ 0 & 0 & -a\,(a+3) & -3a \end{array}\right] \underset{L_3\left(\frac{-1}{a(a+3)}\right)}{\xrightarrow{L_2\left(\frac{1}{2-a}\right)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1-a-a^2}{2-a} & \frac{2-3a}{2-a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a+3} \end{array}\right]$$

$$\underset{L_{13}(-(a+1))}{\xrightarrow{L_{23}\left(-\frac{1-a-a^2}{2-a}\right)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{6}{a+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4a-3}{(a+3)(a-2)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a+3} \end{array}\right] \xrightarrow{L_{12}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2a-9}{(a+3)(a-2)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4a-3}{(a+3)(a-2)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a+3} \end{array}\right].$$

Por tanto, la solución es $S = \left\{\left(\frac{2a-9}{(a+3)(a-2)}, \frac{4a-3}{(a+3)(a-2)}, \frac{3}{a+3}\right) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 2\}\right\}$.

Conclusión final:

1. Si $a = -3$ o $a = 2$ el sistema (1) no admite solución.

2. Si $a = 0$ el sistema (1) admite infinitas soluciones dadas por

$$S = \left\{\left(2 - \frac{1}{2}z, 1 - \frac{1}{2}z, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}.$$

3. Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 2\}$, el sistema (1) admite una única solución dada por

$$S = \left\{\left(\frac{2a-9}{(a+3)\,(a-2)}, \frac{4a-3}{(a+3)\,(a-2)}, \frac{3}{a+3}\right)\right\}.$$