Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Taller N°10
Álgebra (IME006)

Profesores: M. T. Alcalde, R. Benavides, C. Burgueño,
M. Carrillo, F. Salazar, A. Sepúlveda.

26 de Noviembre 2008.

Problema.

Considere la matriz de un endomorfismo f de $\mathbb{K}^3$, respecto a la base canónica dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre:

1. El polinomio característico.
2. Los valores propios de f y sus subespacios asociados.
3. Una base diagonalizante D.
4. La matriz diagonal $(f;D)$ y una matriz invertible P tal que $(f;D) = P^{-1}MP$.

Solución.

1. Para el polinomio característico debemos calcular $\det(M - \lambda\mathbb{I}_3)$, que en nuestro caso corresponde a,

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & 5 \\ 5 & 3-\lambda & 5 \\ 5 & 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_{32}(-1)}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & 5 \\ 5 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 2+\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_{21}(-1)}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & 5 \\ 2+\lambda & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 2+\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{C_{23}(1)}{=} (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 10 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 10 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_{12}(1)}{=} -(2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 13-\lambda & 10 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2+\lambda)^2(13-\lambda).$$

Por tanto, el polinomio característico es $p(\lambda) = (2+\lambda)^2(\lambda - 13) = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 48\lambda - 52$.

2. Encontrando los ceros de $p(\lambda)$ tenemos que los valores propios asociados a f son $\lambda = -2$ con multiplicidad 2 y $\lambda = 13$ con multiplicidad 1.

   Por su parte, para los vectores propios debemos resolver $(M - \lambda\mathbb{I}_3)\vec{v} = \vec{0}$:

   Caso $\lambda = -2$:

$$(M - (-2)\mathbb{I}_3) = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{31}(-1)]{L_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1\left(\frac{1}{5}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   De donde, $x + y + z = 0 \Rightarrow z = -x - y$, por tanto, $S_{\lambda=-2} = \{(x, y, -x-y), x, y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,-1), (0,1,-1) \rangle$ y $\dim(S_{\lambda=-2}) = 2$.

   Caso $\lambda = 13$:

$$(M - 13\mathbb{I}_3) = \begin{bmatrix} -10 & 5 & 5 \\ 5 & -10 & 5 \\ 5 & 5 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3\left(\frac{1}{5}\right)]{\substack{L_1\left(\frac{1}{5}\right) \\ L_2\left(\frac{1}{5}\right)}} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{13}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{31}(2)]{L_{21}(-1)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{32}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2\left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   De donde, $x - z = 0$ e $y - z = 0$, lo que implica $x = y = z$, por tanto, $S_{\lambda=13} = \{(x,x,x), x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,1) \rangle$ y $\dim(S_{\lambda=13}) = 1$.

   Como la dimensión de cada subespacio S_λ coincide con la multiplicidad de su valor propio asociado concluimos que la matriz M es diagonalizable.

3. Por lo anterior, una base diagonalizante de f es $D = \{(1,0,-1), (0,1,-1), (1,1,1)\}$.

4. Una matriz P es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

   que tiene por inversa a

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

y satisface,

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$