Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Prueba N°4
Álgebra (IME006)

Profesores: M. T. Alcalde, R. Benavides, C. Burgueño,
M. Carrillo, F. Salazar, A. Sepúlveda.

24 de Septiembre 2008.

1. Estudie si los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales del espacio vectorial indicado.

   a) $S = \{a + bX + cX^2;\ a + 3b = 0\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

   b) $T = \left\{(x, y);\ \ (x - y)^2 = (x + y)^2\right\}$ de $\mathbb{R}^2$.

   Solución.

   a) Vemos que $S \neq \emptyset$, pues $P(x) = -3 + X + X^2 \in S$. Ahora, sean $P_1(X), P_2(X) \in S$, es decir, $P_1(X) = a_1 + b_1X + c_1X^2$ tal que $a_1 + 3b_1 = 0$ y $P_2(X) = a_2 + b_2X + c_2X^2$ tal que $a_2 + 3b_2 = 0$, luego $P_1(X) + P_2(X) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)X + (c_1 + c_2)X^2$, como $(a_1 + a_2) + 3(b_1 + b_2) = (a_1 + 3b_1) + (a_2 + 3b_2) = 0 + 0 = 0$ concluimos que $P_1(X) + P_2(X) \in S$. Por otra parte, sean $\alpha \in \mathbb{K}$ y $P(X) \in S$, es decir, $P(X) = a + bX + cX^2$ tal que $a + 3b = 0$, luego $\alpha P(X) = \alpha a + \alpha bX + \alpha cX^2$, como $\alpha a + 3\alpha b = \alpha(a + 3b) = \alpha 0 = 0$ tenemos que $\alpha P(X) \in S$. Concluyendo finalmente que $S \leq \mathbb{R}_2[X]$.

   b) Escribiendo $(x - y)^2 = (x + y)^2$ en forma desarrollada y simplificando obtenemos $xy = 0$, es decir, $x = 0$ o $y = 0$, es decir, los pares ordenados son de la forma $(x, 0)$ y $(0, y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Notemos que $(1, 0) \in T$ y $(0, 1) \in T$, pero $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin T$, por tanto, $T \not\leq \mathbb{R}^2$

2. Se tiene que $\mathbb{R}^+$ con la suma y ponderación siguiente: $x \oplus y = xy$, $\alpha \bullet x = x^\alpha$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

   a) Encuentre el vector nulo (es decir, el neutro para $\oplus$).

   b) Demuestre que $(\alpha + \beta) \bullet x = \alpha \bullet x \oplus \beta \bullet x$.

Solución.

a) Sea e el neutro aditivo de $\mathbb{R}^+$ para $\oplus$, es decir, satisface $x \oplus e = e \oplus x = x \Rightarrow xe = x$, como $x \neq 0$ tenemos que $e = 1$.

b) En efecto, $(\alpha + \beta) \bullet x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = x^\alpha \oplus x^\beta = \alpha \bullet x \oplus \beta \bullet x$.

3. En $\mathbb{R}^3$, encuentre los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que el vector $t = (1, \alpha + 1, \alpha - 1)$ sea combinación lineal de los vectores

$$u = (1, 3, 2)\,; \quad v = (0, 1, 0) \ \text{ y } \ w = \left(-1, \alpha^2 - 2\alpha - 5, \alpha^2 - 2\alpha - 5\right).$$

Solución.

Escribamos t como combinación lineal de los vectores u, v y w, $t = xu + yv + zw$, es decir,

$$(1, \alpha + 1, \alpha - 1) = x\,(1, 3, 2) + y\,(0, 1, 0) + z\left(-1, \alpha^2 - 2\alpha - 5, \alpha^2 - 2\alpha - 5\right),$$

de donde tenemos el sistema lineal,

$$\begin{array}{rcl|} x - z & = & 1 \\ 3x + y + 2\left(\alpha^2 - 2\alpha - 5\right) z & = & \alpha + 1 \\ 2x + \left(\alpha^2 - 2\alpha - 5\right) z & = & \alpha - 1 \\ \hline \end{array}$$

Luego,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & \alpha^2 - 2\alpha - 5 & \alpha + 1 \\ 2 & 0 & \alpha^2 - 2\alpha - 5 & \alpha - 1 \end{array}\right] \underset{L_{31}(-2)}{\xrightarrow{L_{21}(-3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha^2 - 2\alpha - 2 & \alpha - 2 \\ 0 & 0 & (\alpha - 3)(\alpha + 1) & \alpha - 3 \end{array}\right]. \tag{1}$$

Por tanto distinguimos tres casos de estudio:
Caso 1: Si reemplazamos $\alpha = 3$ en (1) tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

De donde, $x = 1 + z$ e $y = 1 - z$, $z \in \mathbb{R}$. Así concluimos que,

$$(1, 4, 2) = (1 + z)(1, 3, 2) + (1 - z)(0, 1, 0) + z\,(-1, -2, -2),$$

es decir, para $\alpha = 3$ el vector t es combinación lineal de u, v y w.
Caso 2: Si reemplazamos $\alpha = -1$ en (1) tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right].$$

Lo que implica que el sistema no admite solución. Así, para $\alpha = -1$ el vector t no es combinación lineal de u, v y w.
Caso 3: Si $\alpha \neq 3$ y $\alpha \neq -1$ en (1) tenemos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha^2 - 2\alpha - 2 & \alpha - 2 \\ 0 & 0 & (\alpha - 3)(\alpha + 1) & \alpha - 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3\left(\frac{1}{(\alpha-3)(\alpha+1)}\right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha^2 - 2\alpha - 2 & \alpha - 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha+1} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_{23}(-(\alpha^2-2\alpha-2))]{L_{13}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha+2}{\alpha+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\alpha}{\alpha+1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha+1} \end{array}\right].$$

De donde, $x = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$, $y = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ y $z = \frac{1}{\alpha+1}$. Así, concluimos que,

$$(1, \alpha + 1, \alpha - 1) = \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}(1, 3, 2) + \frac{\alpha}{\alpha + 1}(0, 1, 0) + \frac{1}{\alpha + 1}\left(-1, \alpha^2 - 2\alpha - 5, \alpha^2 - 2\alpha - 5\right),$$

es decir, para $\alpha \neq 3$ y $\alpha \neq -1$ el vector t es combinación lineal de u, v y w.

4. Sea W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ definido por:

$$W = \{(x, y, z, t, w);\ x - y + 4z - t = 0;\ 9x - 3y + 6z - 3t - 3w = 0\}.$$

Encuentre la base escalonada de W.

Solución.

De las ecuaciones dadas obtenemos, $t = x - y + 4z$ y $w = 3x - y + 3z - t = 3x - y + 3z - (x - y + 4z) = 2x - 2z$. Por tanto, $W = \{(x, y, z, x - y + 4z, 2x - 2y); x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Luego,

$$(x, y, z, x - y + 4z, 2x - 2y) = x(1, 0, 0, 1, 2) + y(0, 1, 0, -1, 0) + z(0, 0, 1, 4, -2),$$

es decir, $W = \langle (1, 0, 0, 1, 2), (0, 1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 4, -2) \rangle$. Como los generadores de W están escalonados tenemos que la base requerida es

$$\{(1, 0, 0, 1, 2), (0, 1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 4, -2)\}.$$