Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Prueba N°6
Álgebra (IME006)

Profesores: M. T. Alcalde, R. Benavides, C. Burgueño,
M. Carrillo, F. Salazar, A. Sepúlveda.

03 de Diciembre de 2008.

1. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicaciones lineales. Sean $B = \{(1,2), (0,1)\}$, $C = \{(1,1), (1,0)\}$ y $D = \{(-1,1), (1,0)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Si $(f; B, C) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ y $(g \circ f; B, D) = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$ determine $g(x, y)$.

Solución.

Sabemos que la matriz de una composición de dos morfismos es el producto de sus respectivas matrices, es decir, $(g \circ f; B, D) = (g; C, D) \cdot (f; B, C)$. Por tanto, tenemos,

$$\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} = (g; C, D) \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},$$

de donde,

$$(g; C, D) = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1}. \tag{1}$$

Para la inversa requerida tenemos,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1(-1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_{21}(-4)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2\left(-\frac{1}{2}\right)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{L_{12}(-1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Por tanto, $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Reemplazando esto en (1) tenemos que,

$$(g; C, D) = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Con esto,

$$\begin{aligned} g(1,1) &= \boxed{\text{-1}}(-1,1)+\boxed{2}(1,0)=(3,-1) \\ g(1,0) &= \boxed{\text{-2}}(-1,1)+\boxed{\text{-1}}(1,0)=(1,-2). \end{aligned}$$

Además,

$$(x,y)=\boxed{\text{y}}(1,1)+\boxed{\text{x-y}}(1,0)$$

Luego,

$$\begin{aligned} g(x,y) &= g(y(1,1))+g((x-y)(1,0)) \\ &= yg(1,1)+(x-y)g(1,0) \\ &= y(3,-1)+(x-y)(1,-2) \\ &= (x+2y,y-2x). \end{aligned}$$

2. Calcule el siguiente determinante de $n\times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

Solución.

Sumando la primera fila a las restantes $n-1$ obtenemos el siguiente determinante triangular superior

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 3 & 8 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

Recordando que el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos diagonales, concluimos que el determinante dado vale $1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n=n!$

3. Si $T:\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ es una aplicación lineal cuyos valores propios son 2 y -3 y cuyos vectores propios son $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encuentre $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Solución.

Sabemos que $D = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para $\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$. Luego,

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} &= 2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= -3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha+\beta \\ -2\alpha+\beta \end{pmatrix},$$

implica que $\alpha = \frac{x-y}{5}$ y $\beta = \frac{2x+3y}{5}$. Así,

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T\left(\frac{x-y}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) + T\left(\frac{2x+3y}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{x-y}{5}T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{2x+3y}{5}T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{x-y}{5}T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{2x+3y}{5}T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{x-y}{5}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{2x+3y}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3y \\ -2x-y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Determine si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (z,-y,x)$ es diagonalizable. (Indicación: obtenga la matriz de T respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y luego diagonalice)

Solución.

Sabemos que la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Con esto,

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (0,0,1) = \boxed{0}(1,0,0) + \boxed{0}(0,1,0) + \boxed{1}(0,0,1) \\ T(0,1,0) &= (0,-1,0) = \boxed{0}(1,0,0) + \boxed{\text{-1}}(0,1,0) + \boxed{0}(0,0,1) \\ T(0,0,1) &= (1,0,0) = \boxed{1}(1,0,0) + \boxed{0}(0,1,0) + \boxed{0}(0,0,1). \end{aligned}$$

Luego, la matriz de T respecto a la base canónica es

$$M = (T;B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando $\det(M-\lambda\mathbb{I}_3)=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$ tenemos que el polinomio característico es $p(\lambda)=(1+\lambda)^2(1-\lambda)$. Por tanto, los valores propios son $\lambda=-1$ de multiplicidad 2 y $\lambda=1$ de multiplicidad 1.

Caso $\lambda=-1$:

$$(M-(-1)\,\mathbb{I}_3)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{31}(-1)]{L_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De donde, $x+z=0 \Rightarrow x=-z$, por tanto,

$$S_{\lambda=-1}=\{(-z,y,-z)\,,y,z\in\mathbb{R}\}=\langle(0,1,0)\,,(-1,0,-1)\rangle$$

y $\dim(S_{\lambda=-1})=2$.

Caso $\lambda=1$:

$$(M-1\mathbb{I}_3)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2\left(\frac{1}{2}\right)]{L_{31}(1)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde, $-x+z=0$ e $y=0$, lo que implica $x=z$, por tanto, $S_{\lambda=1}=\{(z,0,z)\,,z\in\mathbb{R}\}=\langle(1,0,1)\rangle$ y $\dim(S_{\lambda=1})=1$.

Como la dimensión de cada subespacio S_λ coincide con la multiplicidad de su valor propio asociado concluimos que la matriz M es diagonalizable.