Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Prueba N°5
Álgebra (IME006)

Profesores: M. T. Alcalde, R. Benavides, C. Burgueño,
M. Carrillo, F. Salazar, A. Sepúlveda.

15 de Octubre de 2008.

1. En $\mathbb{R}^4$ los subespacios $V = \{(x, 4x+y, 3x+y, 3x)\,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$ y $W = \langle (1,2,1,3), (1,0,1,1), (0,0,1,2) \rangle$. Encuentre la base escalonada de V, W, $V+W$ y $V \cap W$.

   Solución.

   Sea $v \in V$, entonces $v = x\,(1,4,3,3) + y\,(0,1,1,0)$, por tanto, el conjunto de generadores de V es $\{(1,4,3,3), (0,1,1,0)\}$. Luego,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Así, la base escalonada de V es $B_V = \{(1,0,-1,3), (0,1,1,0)\}$ y $\dim(V) = 2$.

   Para W tenemos,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2\left(\frac{1}{2}\right)]{L_{13}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Por tanto, la base escalonada de W es $B_W = \{(1,0,0,-1), (0,1,0,1), (0,0,1,2)\}$ y $\dim(W) = 3$

   Por otro lado, para las base escalonada de $V+W$ tenemos,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{42}(-1)]{L_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{54}(1)]{L_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_5\left(\frac{1}{3}\right)]{L_3\left(\frac{-1}{4}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{53}(-1)]{L_{43}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{34}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{23}(-1)]{L_{14}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{13}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así, la base escalonada es $B_{V+W} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ y $\dim(V+W) = 4$.

Finalmente, del hecho que $\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$ se deduce que $\dim(V \cap W) = 1$. Sea $v \in V \cap W$, entonces,

$$v = \alpha(1,0,-1,3) + \beta(0,1,1,0) = a(1,0,0,-1) + b(0,1,0,1) + c(0,0,1,2).$$

A partir de esto tenemos,

$$\begin{aligned} \alpha &= a && (1) \\ \beta &= b && (2) \\ -\alpha+\beta &= c && (3) \\ 3\alpha &= -a+b+2c && (4) \end{aligned}$$

Despejando α de (3) junto a las ecuaciones (1) y (2) obtenemos

$$a = b - c, \tag{5}$$

lo que reemplazando en (4) junto a (1) implica que $b = -\frac{1}{2}a + \frac{5}{2}c$. Esto último sustituido en (5) lleva a concluir que $a = c$, que junto a (3) resulta $b = 2c$. Por tanto, $v = c(1,0,0,-1) + 2c(0,1,0,1) + c(0,0,1,2) = c(1,2,1,3)$, es decir, $V \cap W = \langle(1,2,1,3)\rangle$

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z) = (2x-y, 3y-x)$. Demuestre que f es lineal y encuentre $N(f)$ e $Im(f)$.

Solución.

Sean $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$, por tanto, su suma $u + v \in \mathbb{R}^3$.

Luego,

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \\ &= (2(x_1+x_2)-(y_1+y_2), 3(y_1+y_2)-(x_1+x_2)) \\ &= (2x_1-y_1+(2x_2-y_2), 3y_1-x_1+(3y_2-x_2)) \\ &= (2x_1-y_1, 3y_1-x_1)+(2x_2-y_2, 3y_2-x_2) \\ &= f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2) \\ &= f(u)+f(v). \end{aligned}$$

Sea $\alpha \in \mathbb{K}$ y $w=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, así $\alpha w) \in \mathbb{R}^3$. Luego,

$$\begin{aligned} f(\alpha w) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\ &= (2\alpha x-\alpha y, 3\alpha y-\alpha x) \\ &= \alpha(2x-y, 3y-x) \\ &= \alpha f(x,y,z) \\ &= \alpha f(w). \end{aligned}$$

Por tanto, $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z)=(2x-y,3y-x)$ es una aplicación lineal.

Como el núcleo de la aplicación f corresponde a todos los $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z) = (0,0)$ tenemos que $2x-y=0$ y $3x-y=0$, de donde, $x=y=0$. Por tanto, $N(f) = \{(0,0,z), z \in \mathbb{R}\} = \langle (0,0,1) \rangle$ y con esto, $\dim(N(f))=1$.

Por su parte, si $v \in Im(f) \Rightarrow v = x(2,-1)+y(-1,3)$. Por tanto, $Im(f)$ es generado por el conjunto de vectores $\{(2,-1),(-1,3)\}$. Al escalonar estos generadores obtenemos que $Im(f) = \langle (1,0),(0,1) \rangle = \mathbb{R}^2$, luego $\dim(Im(f))=2$.

3. Estudie la existencia de $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineal tal que $T(1,1,1)=(0,0)$, $T(1,0,0)=(0,1)$ y $T(0,1,0)=(0,2)$. Si no existe, justifique. Si existe, determine $T(x,y,z)$.

Solución.

Como $\{(1,1,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ tenemos que por el Teorema Fundamental del Álgebra Lineal existe una única aplicación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineal tal que $T(1,1,1)=(0,0)$, $T(1,0,0)=(0,1)$ y $T(0,1,0)=(0,2)$.

Supongamos que $(x,y,z)=\alpha(1,1,1)+\beta(1,0,0)+\gamma(0,1,0)$. Realizando las operaciones correspondientes e igualando componentes tenemos el sistema lineal $\alpha+\beta=x$, $\alpha+\gamma=y$, $\alpha=z$, cuya solución es $\alpha=z$, $\beta=x-z$ y $\gamma=y-z$. Por tanto, $(x,y,z)=z(1,1,1)+(x-z)(1,0,0)+(y-z)(0,1,0)$.Luego,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T(z(1,1,1))+T((x-z)(1,0,0))+T((y-z)(0,1,0)) \\ &= zT(1,1,1)+(x-z)T(1,0,0)+(y-z)T(0,1,0) \\ &= z(0,0)+(x-z)(0,1)+(y-z)(0,2) \\ &= (0,x+2y-3z). \end{aligned}$$

4. Diga si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones (justifique en cada caso).

   a) Existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineal inyectiva.

   b) Existe $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineal sobreyectiva.

   c) Existe $h : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}^4$ isomorfismo.

Solución.

a) **Falso**. Sabemos que $\dim(Dom(f)) = \dim(N(f)) + \dim(Im(f))$, pero para que f sea inyectiva se requiere que $\dim(N(f)) = 0$ y como $\dim(Dom(f)) = 3$, se deduce que se requiere $\dim(Im(f)) = 3$, pero esto jamás ocurre pues $\dim(Im(f))$ es a lo más 2.

b) **Verdadero**. Pues en ese caso se tendría que $\dim(Im(g)) = 2$ y $\dim(N(g)) = 1$. Por ejemplo, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(x, y, z) = (x, y)$.

c) **Verdadero**. Pues, $\dim(\mathbb{R}_3[t]) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$ y de acuerdo al Teorema de Isomorfismo Fundamental existe una aplicación lineal biyectiva (Isomorfismo) de $\mathbb{R}_3[t]$ en $\mathbb{R}^4$, a saber, $h(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a, b, c, d)$.