Universidad de La Frontera
Facultad de Ingeniería Ciencias y Administración
Departamento de Matemática y Estadística

Solución Prueba Global II
Álgebra (IME006)

Profesores: M. T. Alcalde, R. Benavides, C. Burgueño,
M. Carrillo, F. Salazar, A. Sepúlveda.

16 de Diciembre 2008.

1. *a*) ¿Existe un epimorfismo $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_2[X]$ tal que $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + X + X^2$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = X + X^2$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2 + 3X + 3X^2$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -1 + X + X^2$?

   b) ¿Cuántas aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ hay que cumplan $f(1,1,1) = (1,0,1,0)$, $f(1,1,0) = (0,1,1,0)$, $f(1,0,0) = (1,1,0,0)$? Además, encuentre la(s) expresión(es) analítica(s) y el núcleo de ella(s).

(No olvide que debe fundamentar cada una de sus afirmaciones).

Solución.

a) Como $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ es una base para $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ tenemos que por el Teorema Fundamental del álgebra lineal existe una única aplicación lineal $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_2[X]$ que cumple $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1+X+X^2$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = X + X^2$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2 + 3X + 3X^2$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -1 + X + X^2$.

Por otro lado, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Así,

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= f\left(a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + f\left(b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + f\left(c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + f\left(d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= af\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + bf\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + cf\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + df\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= a\left(1 + X + X^2\right) + b\left(X + X^2\right) + c\left(2 + 3X + 3X^2\right) + d\left(-1 + X + X^2\right) \\
&= (a + 2c - d) + (a + b + 3c + d)X + (a + b + 3c + d)X^2.
\end{aligned}$$

Estudiemos ahora si el morfismo es epiyectivo. Sea $P(X) \in Im(f) \Rightarrow P(X) = a(1+X+X^2) + b(X+X^2) + c(2+3X+3X^2) + d(-1+X+X^2)$. Por tanto, $Im(f)$ es generado por el conjunto de vectores

$$\left\{1+X+X^2, X+X^2, 2+3X+3X^2, -1+X+X^2\right\}.$$

Al escalonar estos generadores obtenemos que $Im(f) = \langle 1, X+X^2 \rangle$, luego $\dim(Im(f)) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}^4)$ y por tanto no es epiyectiva.

b) Como $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$, por el mismo argumento utilizado en la pregunta anterior, existe una única aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(1,1,1) = (1,0,1,0)$, $f(1,1,0) = (0,1,1,0)$, $f(1,0,0) = (1,1,0,0)$. Además, tenemos que $(x,y,z) = z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0)$. Con esto,

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(z(1,1,1)) + f((y-z)(1,1,0)) + f((x-y)(1,0,0)) \\ &= zf(1,1,1) + (y-z)f(1,1,0) + (x-y)f(1,0,0) \\ &= z(1,0,1,0) + (y-z)(0,1,1,0) + (x-y)(1,1,0,0) \\ &= (x-y+z, x-z, y, 0). \end{aligned}$$

Para el núcleo de f tenemos $f(x,y,z) = (0,0,0,0)$, que implica $x-y+z=0$, $x-z=0$ e $y=0$, de donde $N(f) = \{(0,0,0,0)\}$.

2. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k$, calcule $\begin{vmatrix} c+2a & a & -b \\ f+2d & d & -e \\ i+2g & g & -h \end{vmatrix}$ utilizando sólamente las propiedades del determinante.

Solución.

Aplicando propiedades tenemos,

$$\begin{vmatrix} c+2a & a & -b \\ f+2d & d & -e \\ i+2g & g & -h \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c+2a & a & b \\ f+2d & d & e \\ i+2g & g & h \end{vmatrix} \overset{C_{12}}{=} \begin{vmatrix} a & c+2a & b \\ d & f+2d & e \\ g & i+2g & h \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_{23}}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c+2a \\ d & e & f+2d \\ g & h & i+2g \end{vmatrix} \overset{C_{31}(-2)}{=} -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -k.$$

3. Sea $M = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ la matriz de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ en la base canónica. Encuentre,

a) El polinomio característico de f.

b) Los vectores propios de f y sus subespacios asociados.

c) Una base diagonalizante D.

d) Una matriz invertible P tal que $(f;D) = P^{-1}MP$.

Solución.

a) Para el polinomio característico debemos calcular $\det(M - \lambda \mathbb{I}_3)$,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_{13}(1)}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_{31}(-1)}{=} (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda)$$

Por tanto, el polinomio característico es $P(\lambda) = (3-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda) = 30-31\lambda+10\lambda^2 - \lambda^3$.

b) De lo anterior tenemos que los valores propios asociados a f son $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ y $\lambda = 5$ todos con multiplicidad 1.

Para los subespacios propios asociados tenemos,

Caso $\lambda = 2$:

$$(M - 2\mathbb{I}_3) = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_{32}(-1)]{L_1(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{21}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2\left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De donde, $x + z = 0 \Rightarrow x = -z$ e $y = 0$, por tanto, $S_{\lambda=2} = \{(-z, 0, z), z \in \mathbb{R}\} = \langle(-1, 0, 1)\rangle$ y $\dim(S_{\lambda=2}) = 1$.

Caso $\lambda = 3$:

$$(M - 3\mathbb{I}_3) = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2\left(\frac{1}{2}\right)]{L_{13}(1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{32}(-2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{23}(-1)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

De donde, $x + 2z = 0$ e $y - z = 0$, lo que implica $x = -2z$ y $y = z$, por tanto, $S_{\lambda=3} = \{(-2z, z, z), z \in \mathbb{R}\} = \langle(-2, 1, 1)\rangle$ y $\dim(S_{\lambda=3}) = 1$.

Caso $\lambda = 5$:

$$(M - 5\mathbb{I}_5) = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_{31}(-2)]{L_{21}(4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{32}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2(-1)]{L_2\left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De donde, $x + z = 0$ e $y - z = 0$, lo que implica $x = -z$ y $y = z$, por tanto, $S_{\lambda=5} = \{(-z, z, z), z \in \mathbb{R}\} = \langle(-1, 1, 1)\rangle$ y $\dim(S_{\lambda=5}) = 1$.

c) Por lo anterior, una base diagonalizante de f es $D = \{(-1, 0, 1), (-2, 1, 1), (-1, 1, 1)\}$.

d) Una matriz P es

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

que tiene por inversa a

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

y satisface la relación,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$