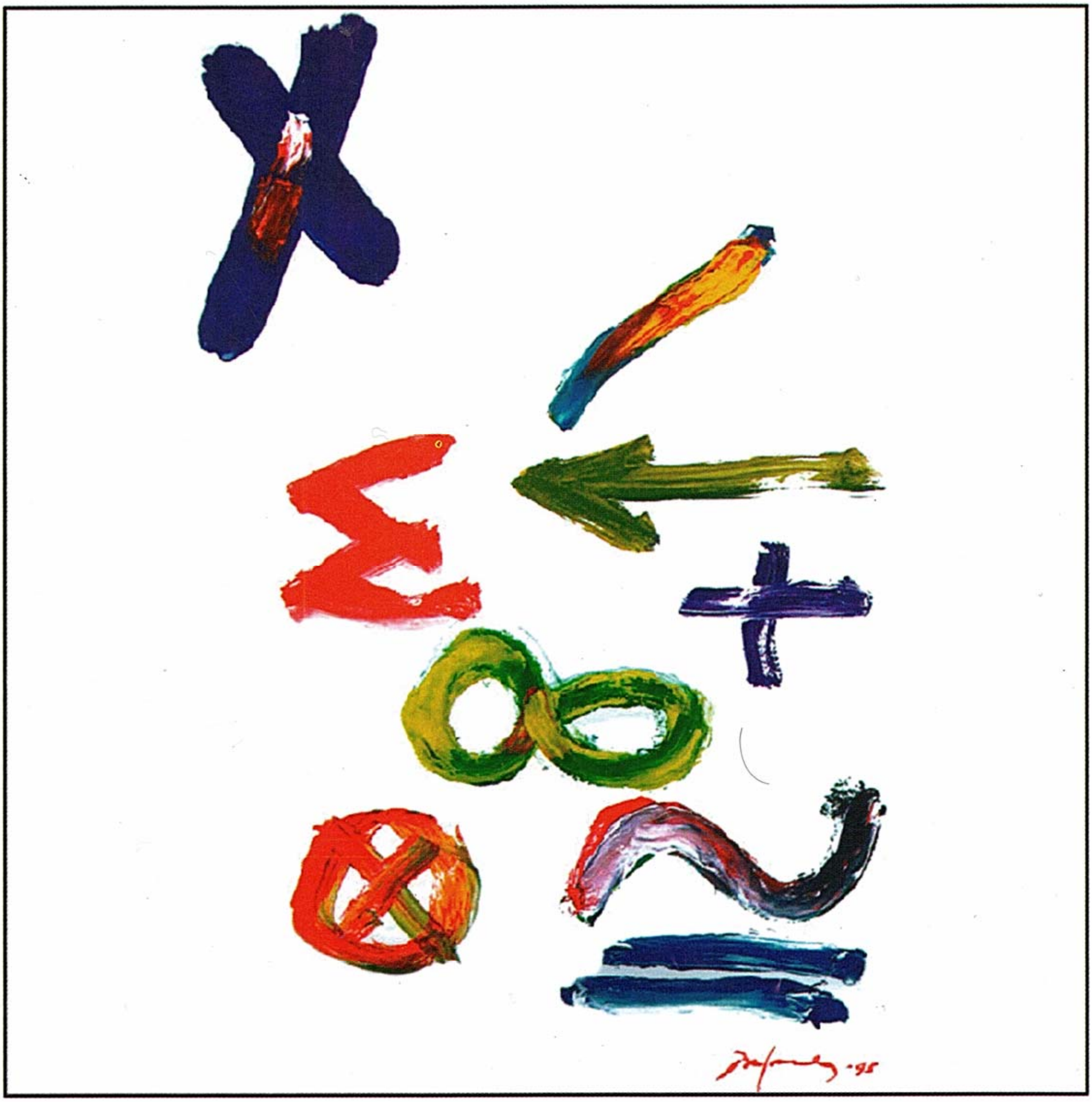
Chile
Sociedad de Matemática

Matemática y Olimpíadas



Sociedad de Matemática de Chile

1

MATEMÁTICA Y OLIMPÍADAS II

Dr. Oscar Barriga
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Dr. Víctor H. Cortés
Facultad de Matemática
Pontificia Universidad Católica de Chile

Dr. Sergio Plaza
Dpto. de Matemáticas y Ciencias de la Computación
Universidad de Santiago de Chile

Dr. Gonzalo Riera
Facultad de Matemática
Pontificia Universidad Católica de Chile

Dr. Hernán Burgos, Dr. Mauricio Godoy
Departamento de Matemática
Universidad de La Frontera

PRESENTACIÓN

Con una altísima probabilidad, quienes abren este maravilloso libro se cuentan entre quienes nos sentimos atraídos de una manera especial por la Matemática. Aún en este caso, hay también una alta probabilidad de que en ellos la idea de las Olimpiadas de Matemática sea un concepto novedoso y algo atípico. Estamos muy habituados a las competencias deportivas desde una edad temprana, pero escasamente se nos presenta a la Matemática como una oportunidad de desplegar los talentos en competencias que, más allá de buscar ganadores, buscan ser un punto de encuentro de niñas y niños con un interés particular.

Siendo esta realidad extraña hoy en día, en un época en que la información parece desbordar cada uno de nuestros momentos, imaginemos por un instante el contexto chileno a mediados de la década de los 90's. Eramos jóvenes entusiastas por una ciencia que descubríamos gracias, la mayoría de las veces, a la intervención providencial de algún profesor que nos regalaba su tiempo para legarnos su pasión. Nos enfrentábamos a bibliotecas insuficientemente nutridas, y a un intercambio de fotocopias ajadas, muy similar a un tráfico romántico y quizás ilícito. Hojas mudas que trasmitían desde listados de ingeniosos problemas soviéticos, hasta alguna técnica geométrica para atacar una pregunta escurridiza que, según sabíamos por oídas, había aparecido hace unos meses en la última olimpíada mundial.

La aparición del libro Matemática y Olimpíadas vino a constituirse entonces como una hoja de ruta para quienes queríamos navegar este océano inmenso. Escrito por cuatro matemáticos profesionales, mismos quienes unos años antes habían apoyado la creación de lo que hoy por hoy es el más tradicional evento científico para escolares del país, la Olimpiada Nacional de Matemática. La primera edición del libro trazó la manera en que muchos aprendimos Matemática. La descripción del Prólogo original da luces claras de que esto se trata directamente de resolver problemas, término que curiosamente parece haber sido re-descubierto en los últimos años. Los autores entregan la receta sin muchos rodeos, receta bien conocida por quienes se dedican a esta ciencia. Buenas definiciones, un recorrido simple pero profundo de los principales resultados relacionados con el tema, algunos ejemplos de aplicación de la técnica, junto con el ingrediente central: un listado bien escogido de ejercicios que van desarrollando la madurez, hacen florecer la intuición y amoldan el carácter para hacer frente a los momentos de frustración que a menudo anteceden a la emoción de la resolución de un problema.

Estando ya bien entrados en el siglo XXI, con la posibilidad de acceder a casi cualquier libro o material por medio de unos simples movimientos de nuestro dedo índice sobre el super computador que traemos en nuestro bolsillo, la empresa de reeditar el Matemática y Olimpiadas puede parecer llamativa y hasta fútil. El acceso masivo al contenido ha traído consigo un nuevo problema, quizás más complejo que aquel que enfrentábamos hace un cuarto de siglo. Los grandes volúmenes de archivos, libros, videos, técnicas, sus múltiples versiones, sus múltiples autores,etc., se han vuelto desconcertantes y una hoja de ruta se hace nuevamente necesaria. La segunda edición, revisada y ampliada, del Matemática y Olimpiadas nos ofrece un camino riguroso, simple y directo hacia las principales técnicas de resolución de problemas olímpicos. Un camino recomendado por profesionales de la matemática, con una dedicación y exitosa experiencia de tres décadas formando y entusiasmando a las nuevas generaciones de matemáticas y matemáticos chilenos. Parte de esta tradición se encuentra plasmada en problemas resueltos por antiguos olímpicos, cuyas soluciones se agregaron en esta edición, mostrando así que los estudiantes pueden resolver problemas de esta complejidad.

El tiempo sigue sin pasar en vano. Además de servir como testimonio de que el libro es una herramienta eficaz en su propuesta, también este cuarto de siglo nos ha golpeado con la partida de dos de los autores originales. Sirvan estas líneas como homenaje a Oscar Barriga y Sergio Plaza, quienes dedicaron su vida y trabajo a contarnos que la matemática nos puede hacer muy felices.

Muchos descubrimos la resolución de problemas olímpicos con la primera edición del libro. Agradezco a los autores la oportunidad de escribir esta presentación a la segunda edición, que sin lugar a dudas se convertirá en un referente para las nuevas generaciones.

Mario Ponce,
Matemático y Olímpico chileno,
Santiago, septiembre de 2018.

Prólogo Primera Edición

En este texto daremos las herramientas básicas para la resolución de problemas en el área de números, geometría, combinatoria y análisis. Estimamos que una comprensión más profunda de los conceptos involucrados en la resolución de problemas en estos tópicos de la matemática, ayudará, por una parte, a enfrentarlos con mayor seguridad y, quizás el más importante, por otra, a conocer la belleza de la matemática a nivel básico.

Se ha tratado que estas notas sean autocontenidas, de modo que seguramente muchos conceptos serán familiares al lector. Se han incluido las demostraciones más relevantes como una manera de ejemplificar el método de análisis que es usual en la matemática. Estos métodos, como veremos, ayudan a desarrollar estrategias para enfrentar resoluciones de problemas y son comprensibles por cualquier persona con aptitudes matemáticas.

En resumen a través de los ejemplos y las demostraciones se ilustra el método analítico de la matemática. El esquema a seguir es el siguiente:

a) Definir los conceptos básicos.
b) Formular los teoremas relevantes de la teoría.
c) Ejemplificar la idea de demostración matemática.

La experiencia en el trabajo con estudiantes en la resolución de problemas muestra que las dificultades más frecuentes que encuentran se refieren a la de comprensión de los enunciados. Un estudiante empieza a tener confianza en sus argumentos intuitivos cuando ve que sus ideas se concretizan en algún hecho de naturaleza más general. A nivel de los torneos nacionales la Comisión Académica Nacional, encargada de elaborar y seleccionar los problemas de la competencia, ha tratado en lo escencial de elegir aquellos problemas que muestren una aptitud de los alumnos para relacionar entes abstractos y analogías.

Después de la selección a nivel nacional de los mejores puntajes, ellos son entrenados de manera uniforme conjuntamnete con estudiantes de años anteriores. Su preparación está orientada a la participación en competencias afines a nivel internacional, procurando no saturar al estudiante con excesiva teoría, sino ayudarle a enfrentar de una manera lógicamente ordenada los problemas de dificultad mayor.

Estamos conciente de que los estudiantes finalistas de cada olimpíada son una elite, y es por ello que la intención de estas notas es describir estos entrenamientos, a modo de guía para docentes y alumnos interesados en conocer más profundamente las ideas matemáticas involucradas.

El trabajo de recopilación de problemas adecuados para estos estudiantes ha sido posible gracias a la colaboración de matemáticos y de contactos realizados a lo largo de estos cinco años de fructífera labor, durante los cuales los estudiantes chilenos han demostrado en la práctica tener aptitudes y gran interés en conocer esta apasionante ciencia, una de las más antiguas de la humanidad.

Vaya también nuestro reconocimiento a la Sociedad de Matemática de Chile, sin cuyo apoyo hubiera sido muy difíicil concretar estos objetivos.

Agradecemos a todos quienes, con su constante apoyo, nos incentivaron a encarar este desafío, y en especial a los profesores Renato Lewin y Nicolás Yus por su lectura acuciosa de los manuscritosy sus valiosos aportes.

Finalmente agradecemos el financiamiento de Fundación Andes, sin el cual esta primera edición aún no vería la luz.

Oscar Barriga
Víctor Cortés
Sergio Plaza
Gonzalo Riera.

Santiago, Marzo 1994

Presentación 1994

Una de las situaciones más difíciles que se ve enfrentado comúnmente un investigador en matemáticas es la de tratar de explicar su labor profesional.

Las respuestas a esta interrogante a lo largo de la historia de la humanidad han sido de la más variada índole: hay quienes plantean que cultivan esta ciencia por satisfacción personal, sin buscar sus aplicaciones inmediatas; otros aseguran que, siendo la búsqueda de conocimiento consustancial a la naturaleza humana y siendo la matemática lenguaje universal, ésta debe cultivarse como contribución al acervo cultural de la humanidad, para permitir a los diversos pueblos comprender su propia y particular realidad. También se estima necesario que todos los países, especialmente aquellos en desarrollo, cultiven las disciplinas científicas básicas para así poder lograr independisarze científica, tecnológica y económicamente.

Concordando en mayor o menor medida con estos planteamientos, se puede constatar que pese a ser la matemática la más común de las ciencias, en el sentido de que está presente y es utilizada por todos en la vida cotidiana, ciertamente no es la ciencia con mayor grado de popularidad; mucha gente tiene sentimientos de aprensión, disgusto e incluso miedo a la matemática.

Aún considerando estas dificultades, creemos que no ha sido suficientemente difundido el muy relevante papel que juega nuestra disciplina en la formación integral de cada ciudadano: de manera privilegiada, la matemática aporta a esta formación capacitando a las personas para tomar decisiones en la vida, para enfrentar situaciones nuevas, para poder crear y expresar ideas originales; esto se logra por ejemplo a través de desarrollar la capacidad de abstracción; de enseñar a relacionar objetos o situaciones diversas, de desarrollar la intuición; en fin, la matemática ayuda a desarrollar una mentalidad crítica y creativa.

Es entonces muy preocupante que sea la más desconocida de las ciencias para el ciudadano medio; es lo que nos atrevemos a llamar el analfabetismo matemático, o, más generalmente, el analfabetismo científico.

Este es el compromiso que como Sociedad de Matemática de Chile hemos asumido: el contribuir a la formación integral del ciudadano chileno del próximo siglo.

Para ello, y desde 1989, por primera vez en el país una sociedad científica, integrada por investigadores, organiza una olimpíada científica para la educación media, la Olimpíada Nacional de Matemáticas; esta competencia anual, concebida como un lugar de encuentro, ha conjugado los esfuerzos de los distintos actores involucrados en el sistema educacional:

los alumnos de educación media, sus profesores, los profesores de sus profesores (esto es, los matemáticos profesionales) y las instituciones que los acogen: sus colegios, el colegio de profesores, las universidades, Conicyt y el Ministerio de Educación.

Nuestros principales objetivos al lanzar estas Olimpíadas han sido el de promover el interés por las Ciencias Matemáticas en la juventud de nuestro país y el de sensibilizar a la sociedad en su conjunto sobre la imperiosa necesidad de adoptar como nación la decisión política de invertir en desarrollo científico.

El interés despertado por estas competencias entre los profesores de educación media ha sido enorme y contagioso; reconocemos especialmente la abnegada labor de estos maestros, a quienes hemos visto multiplicarse en tiempo y esfuerzo para mejor preparar a sus alumnos, creando talleres, seminarios y competencias intercolegios, agilizando y modernizando así la labor educativa; al mismo tiempo, los hemos visto inquietos y preocupados de su propio perfeccionamiemto y valorando mejor su propia labor, al interactuar con los investigadores; sin su aporte, lo logrado no tendría el mismo valor.

Al presentar este texto, el comité de la Sociedad de Matemática de Chile dedicado a las materias de instrucción matemática, International Committee Mathemathical Instruction (ICMI-Chile), ha querido colaborar a despertar el interés por la investigación en matemáticas entre sus lectores; en breve, hacemos nuestro el lema de ICSU-Chile Ïnvertir en ciencia es cosechar progreso"

Rubí Rodríguez Moreno
Presidente
Comité ICMI - Chile

ÍNDICE

Capítulo I

TEORÍA DE NÚMEROS

En este primer capítulo supondremos que el lector está familiarizado con los números naturales y con los números enteros. Estos conjuntos los denotaremos por $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ respectivamente.

También asumiremos conocidas las operatorias de suma $(+)$ y producto $(\cdot)$ en estos conjuntos. Casi siempre escribiremos ab (en vez de $a \cdot b$) para el producto de los números a y b. Además supondremos que se conocen las reglas de orden $<$ y $\leq$ en los números enteros.

I.1. Divisibilidad en los números enteros

Consideremos $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$. Diremos que el número entero no nulo a divide a b si existe un número entero c tal que $b = ac$. Si a divide a b escribimos el símbolo $a|b$. En este caso, al número entero a se le llama un *divisor* de b ; también se dice que b es un *múltiplo* de a , o que a es un *factor* de b.

Ejemplo I.1. *Claramente* $2|18$ *puesto que existe el número entero* 9 *tal que* $18 = 2 \cdot 9$. *Es decir,* 2 *es un divisor de* 18 *y* 18 *es un múltiplo de* 2*.*

Ejemplo I.2. *Para todo número entero* n *diferente de cero se cumple que* $n|0$*. Esto es inmediato de la propiedad de que todo número entero (incluido el cero) multiplicado por cero es igual a cero. Esto se prueba usando que* $0 + 0 = 0$ *y las propiedad de distribución:*

$$n \cdot 0 = n \cdot (0 + 0) = n \cdot 0 + n \cdot 0 \Rightarrow 0 = n \cdot 0\,,$$

donde la última igualdad se obtiene sumando a ambos lados el número entero $(-n \cdot 0)$*.*

Ejemplo I.3. *Es claro que* $3|18$ *pero* 3 *no divide a 20. Sin embargo, sabemos que el número* 20 *se puede escribir como* $20 = 3 \cdot 6 + 2$*.*

Esta propiedad es generalizable a un par de números enteros arbitrarios, como lo indica el resultado siguiente.

Teorema I.1. *(Algoritmo de la División).*

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ *con* $a > 0$*, existen dos únicos números enteros* q, r *tales que*

$$b = q \cdot a + r \tag{I.1}$$

con $0 \leq r < a$*. Al número* r *se le llama el resto de la división de* b *por* a*.*

Este teorema nos dice que si $a > 0$ entonces $a|b$ si y sólo si el resto de la división de b por a es cero.

A continuación listamos algunas propiedades de la división que aplicaremos en forma reiterada en estas notas.

Propiedades de la divisibilidad en $\mathbb{Z}$

i) Si $a|b$ y $b|a$ entonces $a = \pm b$.
ii) Si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$.
iii) Si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$.
iv) Si $a|b$, $a|c$ y $u, v \in \mathbb{Z}$ entonces $a|(bu + cv)$.

Probaremos solamente la propiedad iv) y dejaremos de ejercicio las restantes. Si $a|b$ y $a|c$ entonces existen números enteros k_1 y k_2 tales que $b = k_1 a$ y $c = k_2 a$. Luego $bu + cv$ es de la forma

$$bu + cv = k_1 au + k_2 av = (k_1 u + k_2 v)a\,,$$

lo cual significa que $a|(bu + cv)$.

I.1.1. Máximo común divisor. El *máximo común divisor* entre dos números enteros a, b no nulos es un número entero d, que representamos por $d = (a; b)$, y que satisface las siguientes propiedades:

i) $d > 0$, $d|a$ y $d|b$.
ii) Si $c \in \mathbb{Z}$ es tal que $c|a$ y $c|b$ entonces $c \leq d$.

En otras palabras, el máximo común divisor $(a; b)$ es el mayor divisor común a ambos números. Si existe otro número que divide a a y b entonces necesariamente tal número es menor o igual a d.

Ejemplo I.4.

$$\begin{aligned} (12; 21) &= 3 \\ (943; 414) &= 23\,. \end{aligned}$$

Dos preguntas surgen inmediatamente de la definición de máximo común divisor.

i) ¿ Existe siempre el máximo común divisor de un par de números dados ?
ii) ¿ Es posible construir un algoritmo para calcularlo ?.

La respuesta a ambas preguntas es afirmativa. La respuesta a la primera está basada en un principio de la matemática llamado el "Principio del Buen Orden"(P.B.O.) el cual afirma que :

- *"Todo conjunto no vacío S de números enteros no negativos posee un menor elemento".*

En otras palabras, siempre existe un elemento q en S tal que $q \leq s$, para todo elemento s en S.

En Matemática los principios no se demuestran: su validez se acepta sin discusión. Por otra parte, los teoremas deben ser demostrados y para desarrollar una demostración se pueden usar definiciones, resultados previos y principios. En este capítulo el único principio supuesto será el P.B.O.

Para completitud de estas notas incluimos el método o técnica de *demostración por el absurdo*, o del tercero excluido: consiste en negar la conclusión, y a partir de aquello concluir lógicamente que una afirmación es falsa, sabiéndose que es verdadera. En otras palabras, negando la conclusión se deduce una contradicción. Esta técnica la aplicaremos en varias demostraciones a lo largo de estas notas.

A continuación probaremos, usando esta técnica, el siguiente resultado como consecuencia del Principio del Buen Orden.

Teorema I.2. *(Propiedad Arquimediana). Si a y b son números enteros positivos entonces existe un número entero positivo n tal que $na \geq b$.*

Supongamos que no existe tal número n; es decir, supongamos que $na < b$ para todo entero positivo n. Los números a y b son enteros positivos dados y fijos. Construyamos el siguiente conjunto S :

$$S = \{b - na : n \in \mathbb{Z},\ n > 0\} = \{b - a, b - 2a, \ldots\}.$$

Como hemos supuesto que $b - na > 0$ para todo entero positivo n, se tiene que S es un conjunto no vacío de números enteros positivos. Aplicando el Principio del Buen Orden se obtiene que S posee un menor elemento. Luego existe $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $(b - m_0\, a) \leq (b - na)$ para todo n entero positivo. De esta última desigualdad se obtiene que $n \leq m_0$ para todo n entero positivo, lo cual es evidentemente falso, pues por ejemplo $m_0 + 1 > m_0$. Esta contradicción se obtuvo por la suposición de que $na < b$ para todo entero positivo n. Por lo tanto la suposición es falsa, y el teorema ha sido probado.

Con respecto a la segunda pregunta, una manera de calcular $(a;b)$ es encontrar todos los divisores de a y de b y elegir el mayor divisor común a ambos números. Este método resulta muy engorroso para números grandes. Un método más eficaz esta descrito en el séptimo libro de la obra de Euclides, *Los elementos*. Este algoritmo para el cálculo de $(a;b)$ se basa en el siguiente resultado:

Lema I.1. *Si $b = qa + r$, entonces $(a;b) = (a;r)$.*

La demostración es inmediata de la definición de máximo común divisor. Sean $k = (a;b)$ y $\ell = (a;r)$ los máximos comunes divisores de a, b y de a, r respectivamente.

Despejando r se tiene que $r = b - qa$. Como $k|a$ y $k|b$ se obtiene, por la propiedad iv) de la divisibilidad, que k también divide a r, y luego por definición $k \leq \ell$. Además ℓ es también un divisor de $b = qa + r$, y por definición de k se tiene que $\ell \leq k$. Por lo tanto no queda otra alternativa que $k = \ell$.

Para calcular $(a;b)$ procedamos de la siguiente manera: aplicando el algoritmo de la división sucesivamente, obtenemos la siguiente cadena de igualdades

$$
\text{(I.2)}\qquad
\begin{array}{rcll}
b & = & q \cdot a + r_1 \ , & 0 \leq r_1 < a \\
a & = & q_2 \cdot r_1 + r_2 \ , & 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 & = & q_3 \cdot r_2 + r_3 \ , & 0 \leq r_3 < r_2 \\
\vdots & & & \vdots \\
r_{n-2} & = & q_n \cdot r_{n-1} + r_n \ , & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} & = & q_{n+1} r_n + r_{n+1} \ , & r_{n+1} = 0.
\end{array}
$$

Paramos el proceso al encontrar el primer resto nulo. Esto siempre sucede, puesto que el resto de una etapa es estrictamente menor que el resto de la etapa anterior y r_1 , el primer resto, es estrictamente menor que a. Aplicando el Lema I.1 se obtiene que

$$(a; b) = (a; r_1) = (r_1; r_2) = \ldots = (r_{n-1}; r_n) = r_n.$$

Luego r_n es el máximo común divisor de a y b ; es decir, $(a; b)$ es igual al último resto no nulo del proceso.

Ejemplo I.5. *Calculemos* $(414; 943)$.

$$
\begin{array}{rcl}
943 & = & 2 \cdot 414 + 115 \\
414 & = & 3 \cdot 115 + 69 \\
115 & = & 1 \cdot 69 + 46 \\
69 & = & 1 \cdot 46 + 23 \\
46 & = & 2 \cdot 23
\end{array}
$$

En este ejemplo, $a = 414$, $b = 943$ y los correspondientes restos son $r_1 = 115$, $r_2 = 69$, $r_3 = 46$, $r_4 = 23$ y $r_5 = 0$. Luego $(414; 943) = 23$.

Este algoritmo también prueba que para un par de números enteros a, b existen α, β números enteros tales que:

$$\text{(I.3)}\qquad (a; b) = \alpha a + \beta b \ .$$

En el Ejemplo I.5 se obtienen α y β eliminando consecutivamente los restos $r_1, r_2, \ldots, r_n$ empezando por la penúltima igualdad:

$$
\begin{array}{rcl}
23 & = & 69 - 1 \cdot 46 \\
 & = & 2 \cdot 69 - 115 \\
 & = & 2 \cdot (414 - 3 \cdot 115) - 115 \\
 & = & 2 \cdot 414 - 7 \cdot 115 \\
 & = & 2 \cdot 414 - 7 \cdot (943 - 2 \cdot 414) \\
 & = & 16 \cdot 414 - 7 \cdot 943 \ .
\end{array}
$$

Es decir, $\alpha = 16$ y $\beta = -7$.

Este ejemplo muestra como proceder para el caso en que a y b son dos enteros cualesquiera: se empieza por la última igualdad de la cadena en (I.2) y se continúa hacia atrás, imitando lo realizado en el ejemplo.

Un interesante ejercicio consiste en probar que el máximo común divisor $d = (a;b)$ está también determinado por las condiciones

i) $d > 0$, $d|a$ y $d|b$.
ii) Si $c|a$ y $c|b$ entonces $c|d$.

Para probar que estas condiciones (que no usan el concepto de orden " $\leq$ ") son equivalentes a la definición de $(a;b)$ dada anteriormente se aplica la propiedad (I.3) del máximo común divisor.

I.1.2. Números coprimos. Diremos que los números enteros no nulos a, b , $a \neq b$, son *relativamente primos* (o coprimos) si ellos no poseen divisores comunes diferentes del 1 y del -1. Es inmediato de las definiciones que a y b son coprimos si y sólo si $(a;b) = 1$.

Ejemplo I.6. *Los números* 18 *y* 35 *son coprimos, mientras que* 18 *y* 15 *no lo son, puesto que* 3 *es un divisor común.*

En particular, por (I.3), si a y b son coprimos entonces existen dos números enteros α y β tales que

$$a\alpha + b\beta = 1 \,. \tag{I.4}$$

Ahora probaremos un resultado que aplicaremos en la próxima sección y que se usa frecuentemente, y su demostración utiliza la reducción al absurdo.

Lema I.2. *Si* $d = (a;b)$ *es el máximo común divisor de* a *y* b*, entonces es siempre posible encontrar enteros* r, s *tales que* $a = rd$, $b = sd$ *con* $(r;s) = 1$.

Por definición de d se sabe que él es un divisor positivo de a y b; luego es posible encontrar un par de números r, s tal que $a = rd$, $b = sd$. Si r y s no fueran coprimos, entonces ellos tendrían un divisor común $z > 1$. Entonces zd sería un divisor común de a y b. Como $zd > d$, se obtiene así una contradicción con la hipótesis de que d es el máximo común divisor de ellos.

Se puede listar una gran cantidad de propiedades para este tipo de números. Mencionamos solamente algunas, y dejamos como ejercicios sus demostraciones.

Propiedades números coprimos Sean a, b dos números coprimos, y sean c y d dos enteros.

i) Si $c|a$ y $d|b$, entonces $(c;d) = 1$.
ii) Si $a|bc$, entonces $a|c$.
iii) Si $a|c$ y $b|c$, entonces $ab|c$.
iv) Si $(a;c) = 1$, entonces $(a;bc) = 1$.
v) Si $c|a$, entonces $(b\,;c) = 1$.

I.1.3. Números primos. Diremos que un número entero $p > 1$ es un *número primo* (o simplemente primo) si sus únicos divisores son $1, -1, p$ y $-p$. Si un número $a > 1$ no es primo diremos que a es un *número compuesto.*

En este texto trabajaremos con los primos positivos. Los primeros primos son $2, 3, 5, 7$, $\ldots$, y los primeros compuestos son $4, 6, 8, 9, \ldots$. Hacemos notar que el número 1 no es primo ni compuesto.

Examinaremos una propiedad elemental de los números primos que es de utilidad.

LEMA I.3. *Si p es primo y $p|ab$ entonces $p|a$ o $p|b$. Es decir, si un número primo divide al producto de dos números entonces necesariamente él debe dividir a uno de ellos (o a ambos).*

La demostración es simple, puesto que si $p|a$ no hay nada más que hacer. Si p no divide a a entonces $(p; a) = 1$ (puesto que p no posee ningún divisor positivo fuera de 1 y p); es decir, a y p son coprimos. Aplicando la propiedad ii) de la coprimalidad se obtiene que necesariamente $p|b$.

Ahora estamos en condiciones de describir el resultado quizás más importante de la teoría de números, llamado el Teorema Fundamental de la Aritmética (T.F.A.).

TEOREMA I.3. *Sea $n > 1$ un número entero. Entonces existen primos $p_1, p_2, \ldots, p_r$ y números enteros positivos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ tales que*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_r^{\alpha_r}. \tag{I.5}$$

con $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$. Además esta representación (I.5), llamada "descomposición primaria de n", es única.

Ejemplo I.7. *Claramente si no se impone la condición $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$, tal representación no es única. Por ejemplo el número 12 posee las descomposiciones siguientes:*

$$\begin{aligned} 12 &= 2^2 \cdot 3 \\ 12 &= 2 \cdot 3 \cdot 2 \\ 12 &= 3 \cdot 2^2 , \end{aligned}$$

pero sólo la primera de estas cumple la condición $p_1 = 2 < p_2 = 3$. Para los números 112 y 465 , sus descomposiciones primarias son :

$$\begin{aligned} 112 &= 2^4 \cdot 7 \\ 165 &= 3 \cdot 5 \cdot 11. \end{aligned}$$

La demostración del T.F.A. está basada en el P.B.O.. Daremos a continuación un esbozo de ella.

Como $n > 1$ entonces hay solamente dos posibilidades para n :

i) n es primo, y luego no hay nada más que hacer: $p_1 = n$, $\alpha_1 = 1$, y $r = 1$.
ii) n es compuesto.

En el segundo caso se tendría que n posee divisores positivos distintos de 1 y n. Entonces llamamos p_1 al menor de los divisores positivos y mayores que 1 de n , el cual existe por el P.B.O. puesto que el conjunto S definido por

$$S = \{c \ : \ c|n\,,\ c > 1\}$$

es un conjunto no vacío de enteros positivos.

Afirmación: p_1 es primo.

Si p_1 no fuera primo entonces p_1 posee un divisor $c > 1$ con $c < p_1$. Como $c|p_1$ y $p_1|n$ entonces $c|n$ (propiedad iii) de la división), lo cual contradice la minimalidad de p_1, quedando demostrada la afirmación.

Por definición de divisor existe un número entero $n_1 > 1$ tal que

$$n = n_1 \cdot p_1.$$

Fijemos nuestra atención en n_1. Hay dos posibilidades para él, ya descritas en i) y ii). Aplicando el mismo argumento sobre n_1 , se obtiene que existe p_2 tal que $p_2|n_2$ con p_2 el menor divisor posible de n_2. Imitando lo hecho para p_1 obtenemos que p_2 también es primo. Luego

$$n = n_2 \cdot p_2 \cdot p_1, \quad \text{con} \ \ 1 \leq n_2 < n_1 < n.$$

Continuando este método se obtiene que en algún instante n_r es primo, pues en cada etapa $n_r < n_{r-1} < \cdots < n_2 < n_1 < n$, y n_r no puede ser menor que 1.

Varias preguntas se pueden plantear para los primos. Algunas de ellas son :

i) ¿ Es la cantidad de primos infinita ?
ii) ¿ Existe algún algoritmo para encontrarlos todos ?

Empecemos con la primera. La respuesta a tal pregunta se encuentra en el libro IX de los *Elementos* de Euclides. El argumento descrito allí es de una simplicidad asombrosa.

Teorema I.4. *(Euclides) La cantidad de números primos es infinita.*

Para demostrar este teorema Euclides supuso que hay una cantidad finita de números primos y logró construir otro primo más a partir de los anteriores. Examinemos esta construcción mas detalladamente.

Supongamos que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son todos los primos posibles. Considere el número entero q definido como $q = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$. Puesto que $q > p_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, se tiene que q no es primo, puesto que estamos suponiendo que $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ son todos los primos posibles. Puesto que q no es primo, él debe de ser compuesto. Aplicando el T.F.A. se obtiene que q posee un divisor primo p, el cual debe ser uno de los $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Es decir, $p|q$. Pero además claramente $p \mid (p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots p_n)$. Aplicando la propiedad iv) de la división, p debe dividir al número $(q - \ p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots p_n) = 1$, y por lo tanto $p = 1$ lo cual contradice la definición de primo. En resumen, se ha probado la infinitud del conjunto de los números primos.

Es interesante hacer notar que si comenzamos con $p = 2$, el primer primo, esta construcción genera los siguientes números :

$$\begin{aligned} q_1 &= 2 + 1 = 3 \\ q_2 &= 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ q_3 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31 \\ q_4 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211 \\ q_5 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311 \end{aligned}$$

los cuales son primos. Sin embargo, q_6, q_7, q_8 no lo son. Uno de los problemas no resueltos en teoría de números es determinar si existe una cantidad infinita de primos que se pueda generar con el algoritmo anterior. Se conocen muy pocas maneras (muy difíciles de obtener) de generar primos. En resumen, la respuesta a la segunda pregunta planteada no se conoce y es muy probable que tal algoritmo no exista.

Una variación del argumento de Euclides es el siguiente :

$$\begin{aligned} n_1 &= 2 \\ n_2 &= n_1 + 1 \\ n_3 &= n_2 \cdot n_1 + 1 \\ n_4 &= n_3 \cdot n_2 \cdot n_1 + 1 \\ &\vdots \\ n_k &= n_{k-1} \cdot n_{k-2} \cdots n_1 + 1 \end{aligned}$$

Problema. Pruebe que dos números cualesquiera seleccionados del algoritmo anterior son coprimos: es decir, si $i \neq j$ entonces $(n_i; n_j) = 1$.

Esta construcción produce infinitos números n_k coprimos entre sí. Ya que ellos no poseen ningun factor primo común, obtenemos otra demostración de que la cantidad de primos es infinita. Para finalizar esta sección daremos un par de resultados acerca de la distribución de los primos en $\mathbb{Z}$.

Como ya hemos visto los primeros primos son $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$. Supongamos por un momento que p_1 sea el primer primo, p_2 el segundo primo, p_3 el tercero y así sucesivamente. En otras palabras $p_1 = 2$, $p_2 = 3, p_3 = 5$ y p_n será el $n-$ésimo primo. Luego por notación $p_n < p_{n+1}$. El mayor número primo conocido hasta 1979 era $2^{21.701} - 1$, cuando la primera edición de este libro se publicó. Ahora, en 2018, se sabe que $2^{77.232.197} - 1$ es el mayor primo construido; tiene más de 17 millones de dígitos.

Teorema I.5. *Si p_n denota el $n-$ésimo primo entonces*

$$p_n < 2^{2^n}.$$

Este resultado prueba que al menos hay $(n+1)$ primos menores que 2^{2^n}. La demostración es una clara y sencilla aplicación del Principio de Inducción Matemática, y la daremos en el próximo capítulo.

Teorema I.6. *Hay infinitos números primos de la forma $4n + 3$.*

La demostración es una inmediata variante de la demostración del resultado anterior, y por consiguiente la incluiremos también en el próximo capítulo.

Entre las conjeturas acerca de la distribución de los números primos que aún permanecen sin respuesta mencionamos las siguientes.

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, ¿ Hay siempre un número primo entre n y $2n$?
- ¿ Hay infinitos primos de la forma $n^2 + 1$?

I.1.4. Congruencias. Fijemos m en $\mathbb{N}$ y a , b en $\mathbb{Z}$. Se dice que a es *congruente* con b *módulo* m si $(a-b)$ es múltiplo de m, lo que representamos por el símbolo $a \equiv b\ (m)$:

$$a \equiv b\ (m) \ \text{ si y sólo si } \ m \mid (a-b).$$

Ejemplo I.8.

$$\begin{array}{ll} 11 \equiv 1\ (5) & \textit{puesto que } 11 - 1 = 10 \ \textit{ es múltiplo de } 5. \\ 23 \equiv 2\ (7) & \textit{puesto que } 23 - 2 = 21 \ \textit{ es múltiplo de } 7. \end{array}$$

Es inmediato de la definición de congruencia que ella es refleja: es decir, para todo número entero a se tiene que $a \equiv a\ (m)$. Además es claro que ella es simétrica, puesto que

$$a \equiv b\ (m) \text{ si y sólo si } b \equiv a\ (m).$$

A continuación daremos algunas otras propiedades de las congruencias. Sus demostraciones son directas de las propiedades de la divisibilidad y las dejamos de ejercicio para el lector.

Propiedades de la congruencia

i) Si $a \equiv 0\ (m)$ entonces $m \mid a$.
ii) Si $a \equiv b\ (m)$ entonces a y b poseen el mismo resto en la división por m.
iii) Si $a \equiv b\ (m)$ y $b \equiv c\ (m)$ entonces $a \equiv c\ (m)$ (Transitividad) .
iv) Si $a \equiv b\ (m)$ entonces $(a+c) \equiv (b+c)\ (m)$ y $(a \cdot c) \equiv (b \cdot c)\ (m)$ para todo entero c.
v) Si $a \equiv b\ (m)$ entonces $b^k \equiv a^k\ (m)$ para todo k entero positivo.
vi) Si p es primo y $a \cdot b \equiv 0\ (p)$ entonces $a \equiv 0\ (p)$ ó $b \equiv 0\ (p)$.

Es importante observar que para un número m positivo fijo y para un entero z cualquiera, éste debe satisfacer una y sólo una de las siguientes congruencias:

$$z \equiv 0\ (m)\ ,\ z \equiv 1\ (m)\ ,\ z \equiv 2\ (m)\ ,\ \ldots, z \equiv m-1\ (m).$$

Este hecho es consecuencia directa del Algoritmo de la División y el Teorema I.1, y es otra forma de decir que cualquier número entero al dividirlo por m posee resto igual a 0 ó a 1 ó a 2 ... ó a $(m-1)$.

En particular, si elegimos $m = 2$ esto nos asegura que todo número entero es par, si satisface $z \equiv 0\ (2)$, o es impar, si cumple que $z \equiv 1\ (2)$.

Ejemplo I.9. *Consideremos la congruencia módulo 3 , es decir* $m = 3$. *Entonces cualquier número entero* a *es de la forma* $a = 3k$ *o de la forma* $a = 3k + 1$ *o de la forma* $a = 3k + 2$. *Notemos que* $a \equiv 2\ (3)$ *es lo mismo que decir* $a \equiv -1\ (3)$.

Para finalizar esta sección enunciamos dos teoremas acerca de los números primos que son útiles de recordar. Sus demostraciones son más complicadas y las omitiremos.

Teorema I.7. *(Fermat) Considere* p *primo y* a *un número entero. Entonces*

$$a^p \equiv a\ (p).$$

El siguiente teorema caracteriza mediante una congruencia los números primos.

Teorema I.8. *(Wilson) Sea* a *un número entero mayor que* 1. *Entonces*

$$a \text{ es primo si y sólo si } (a-1)! \equiv -1\ (a).$$

I.1.5. Aritmética modular. Para cada número entero positivo m se construye una partición disjunta de $\mathbb{Z}$ en m conjuntos

$$\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \ldots, \mathbb{Z}_{m-1}, \mathbb{Z}_m,$$

donde $\mathbb{Z}_k$ en el conjunto de aquellos números enteros que al dividirlos por m su resto es k. Como ya se mencionó, mediante el algoritmo de la división, Teorema I.1, se concluye que cualquier entero al dividirlo por m tiene resto: 0 ó 1 ó 2 , ..., ó $(m-1)$, luego está en uno y sólo un de esos conjuntos.

Es común representar a estos conjunto por su resto:

$$\bar{1} = \mathbb{Z}_1, \quad \bar{2} = \mathbb{Z}_2, \ldots, \overline{m-1} = \mathbb{Z}_{m-1}, \quad \bar{0} = \mathbb{Z}_m$$

En otras palabras, $\bar{1}$ representa al conjunto de los enteros con resto igual a 1 en la división por m, $\bar{1} = \{mk + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$. De esta manera $\bar{0}$ es el subconjunto de los números enteros múltiplos de m.

La ecuación módulo m dada por $ax \equiv c\ (m)$ es equivalente a

$$ax \equiv c\,(m) \Leftrightarrow ax - c = k_1\, m \text{ para algún } k_1 \in \mathbb{Z}.$$

Si $a > m$ se tiene que $a = \tilde{a}m + q$ con $0 \leq q < m$. La ecuación $ax \equiv c\ (m)$ se transforma en

$$ax - c = (\tilde{a}m + q)x - c = k_1 m \Leftrightarrow qx - c = k_2 m \text{ para algún } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Es decir, $ax \equiv c\ (m)$ es equivalente a $qx \equiv c\ (m)$ con $0 \leq q < m$.

Estos cálculos muestran que resolver la ecuación $ax \equiv c\ (m)$ es equivalente a resolver la ecuación que se obtiene al reemplazar los valores de a y c por su reducción módulo m: no se pierde información.

Para despejar x en la ecuación $ax \equiv c\ (m)$, multiplicamos la ecuación por un número b que cumpla $0 < b < m$ y $ba \equiv 1\ (m)$. Usando la propiedad (iv) de las congruencias, se despeja x:

$$ax \equiv c\ (m) \Rightarrow (ba)x \equiv bc\ (m) \Rightarrow x \equiv bc\ (m)\,.$$

Por supuesto, estamos suponiendo que existe tal número b. Pero no siempre existe, como muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo I.10. *La ecuación* $3x \equiv 2\ (6)$ *no tiene solución, como muestran los cálculos siguientes:* $3 \cdot 1 \equiv 3\ (6)$*,* $3 \cdot 2 \equiv 03\ (6)$ *,* $3 \cdot 3 \equiv 3\ (6)$*,* $3 \cdot 4 \equiv 0\ (6)$*,* $3 \cdot 5 \equiv 3\ (6)$*.*

Un criterio bastante útil es el siguiente:

TEOREMA I.9. *La ecuación* $ax \equiv b\ (m)$ *tiene solución si y sólo si el máximo común divisor* $(m;a)$ *de* m *y* a *divide a* b*.*

Un caso particular del teorema anterior es $m = p$, p primo: $ax \equiv b\ (p)$ siempre tiene solución para $0 < a < p$, puesto que $(p;a)$=1. Por lo mencionado anteriormente sobre reducir los coeficientes de la ecuación módulo $m = p$, se concluye que la ecuación $ax \equiv b\ (p)$ siempre tiene solución si a es cualquier entero no divisible por el primo p si b no lo es.

Ejemplo I.11. *Resolver la ecuación* $2x^2 \equiv 3\ (7)$ *es equivalente a resolver* $8x^2 \equiv 12\ (7) \Leftrightarrow x^2 \equiv 5\ (7)$*, la cual no tiene solución puesto que ninguno de los números* $1, 4, 9, 16, 25, 36$ *es congruente con* 5 *módulo* 7*.*

Por otro lado, la ecuación lineal $2x - 4 \equiv 5(7)$ *es equivalente a* $2x \equiv 2(7)$*. Luego,* $8x \equiv 8(7)$*, es decir,* $x \equiv 1(7)$*. El conjunto solución es* $\bar{1} = \{7k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$*.*

I.1.6. Ecuaciones Diofánticas. Una ecuación en una o más incógnitas se dice diofántica si la ecuación posee coeficientes que son números enteros. En particular nos interesa examinar la llamada ecuación diofántica lineal en dos incógnitas:

$$ax + by = c \quad , \tag{I.6}$$

donde a, b, c son enteros dados con a, b no simultáneamente nulos. Diremos que un par de números enteros x_0, y_0 es solución de la ecuación (I.6) si y sólo si $ax_0 + by_0 = c$.

Ejemplo I.12. *Consideremos la ecuación diofántica* $3x + 6y = 18$*. Claramente* $x_0 = 4$ *y* $y_0 = 1$ *es una solución, puesto que* $3 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 18$*. También los pares* $-6,\ 6$ *y* $10, -2$ *son soluciones. Esto muestra que una ecuación diofántica lineal no necesariamente posee soluciones únicas. Más aún, puede suceder que la ecuación no posea solución en* $\mathbb{Z}$*.*

Por ejemplo, la ecuación diofántica $2x + 8y = 13$ *no puede tener soluciones en los números enteros, puesto que el lado izquierdo de la ecuación es siempre par.*

En el próximo teorema formulamos un criterio de solubilidad para las ecuaciones diofánticas del tipo (I.6).

TEOREMA I.10. *Denotemos por* $d = (a;b)$*. La ecuación diofántica (I.6) posee una solución si y sólo si* $d|c$ *. Además si* $x_0,\ y_0$ *es una solución particular de la ecuación entonces todas las otras soluciones* x, y *son:*

$$x = x_0 + \alpha t, \qquad y = y_0 - \beta t$$

para t *un entero arbitrario, donde* $b = \alpha d$ *y* $a = \beta d$*.*

Una consecuencia inmediata de este teorema es el caso particular en que los coeficientes a, b de la ecuación son coprimos. En tal caso se obtiene que si $x_0,\ y_0$ es una solución particular de la ecuación entonces todas las soluciones x, y están dadas por:

$$x = x_0 + bt, \qquad y = y_0 - at$$

para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo I.13. *Estudiemos la ecuación diofántica*

$$172x + 20y = 1000.$$

Se puede calcular que $(172; 20) = 4$*. Puesto que* 4 *divide a* 1000*, el teorema garantiza que la ecuación posee solución en los números enteros. Además se tiene que*

$$1000 = 500 \cdot 172 + (-4250) \cdot 20 \,.$$

Por lo tanto $x = 500$ *y* $y = -4250$ *es una solución de la ecuación, y todas las soluciones son de la forma* $x = 500 + 5t$ *e* $y = -4250 - 43t$ *, con* t *entero.*

I.2. Funciones aritméticas y sucesiones

En primera instancia definiremos el concepto de función y pondremos énfasis en las llamadas funciones aritméticas.

Una función f *de un conjunto* A *en otro conjunto* B *es una regla que asocia a cada elemento del conjunto* A *un y sólo un elemento del conjunto* B *.*

Usualmente se denota una tal función por el símbolo

$$f \ : \ A \to B.$$

Al conjunto A se le llama el *dominio* de la función f. Al conjunto de todos los valores de la función (que en general es sólo una parte del conjunto B) se le llama *recorrido* de la función. Se escribe $f(z)$ para el elemento de B que corresponde a $z \in A$ bajo la regla que define la función f, y se le llama la *imagen* de z por f.

De esta definición se deduce que una función queda determinada completamente por su dominio y por la regla de asociación de cada elemento de él. En particular dos funciones son iguales si sus dominios son iguales y el valor que ellas asignan a cada elemento de tal dominio es el mismo.

Usualmente cuando el dominio de la función es el conjunto $\mathbb{Z}$ o un subconjunto de él (como por ejemplo $\mathbb{N}$) se dice que la función es una *función aritmética.*

Un problema típico para trabajar con funciones definidas en $\mathbb{Z}$ con valores en $\mathbb{Z}$ es el siguiente, Prueba Nacional Olimpíada 2017.

Problema. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con la propiedad de que para todo par de números enteros x, y

$$f(x + f(f(y))) = y + f(f(x))\,.$$

No hay que olvidarse que x, y son enteros, así como sus imágenes $f(x)$, $f(y)$. De la igualdad dada se obtiene que las imágenes de ellas por f también son iguales; es decir,

$$f(f(x + f(f(y)))) = f(y + f(f(x)))\,.$$

Además, intercambiando los roles de x e y en la igualdad dada se obtiene que $f(y + f(f(x))) = x + f(f(y))$. Luego, $f(f(x + f(f(y)))) = x + f(f(y))$.

Llamemos a al entero $a = f(f(y))$. Entonces se obtiene de la última igualdad que $f(f(x+a)) = x+a$. Como x es arbitrario, $x+a$ recorre todos los enteros, y se deduce que $f(f(z)) = z$ para todo $z \in \mathbb{Z}$.

De la igualdad original se sigue entonces que $f(x+y) = x+y$ para todo x, y. Tomando $u = x+y$ se concluye finalmente que la única función que satisface la igualdad es $f(u) = u$ para todo $u \in \mathbb{Z}$; es decir, la función identidad en los enteros.

Estudie la misma pregunta para funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Examinemos algunos ejemplos de tales reglas aritméticas.

Ejemplo I.14. *Función* σ.

Consideremos $A = B = \mathbb{N}$. Definamos la siguiente regla: a cada número natural n le asociamos la suma de los divisores positivos de n.

Mediante esta regla a $n = 1$ se le asocia 1 , a 2 se le asocia 3 , a 3 se le asocia 4, a 4 se le asocia 7, y así sucesivamente. Puesto que todo número natural posee una única cantidad de divisores, esta regla define una función, que se denota por la letra griega σ (sigma), y cuyo dominio es $\mathbb{N}$. Más precisamente, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y

$$\sigma(n) = \textit{ suma de los divisores de } n\ .$$

Es decir a cada número natural $n = 1, 2, \ldots$ se le asocia $\sigma(1)$, $\sigma(2), \ldots$ dados por

$$\sigma(1) = 1\ , \quad \sigma(2) = 3\ , \quad \sigma(3) = 4\ ,$$
$$\sigma(4) = 7\ , \quad \sigma(5) = 6\ , \quad \sigma(6) = 12\ , \ldots .$$

Claramente por definición de primo se tiene que

$$\sigma(n) = n + 1 \quad \textit{si y sólo si} \quad n \quad \textit{es primo.}$$

Ejemplo I.15. *Función ϕ de Euler.*

A todo número $n \in \mathbb{N}$ le asociamos la cantidad de número positivos coprimos a n que no sean mayores que n . Llamemos ϕ a tal regla. Claramente ella define una función aritmética, puesto que a cada número natural se le asocia un único número, que en este caso es también un elemento de $\mathbb{N}$.

Por ejemplo se tiene que:

$$\phi(1) = 1, \quad \phi(2) = 1, \quad \phi(3) = 2, \quad \phi(4) = 2, \quad \phi(5) = 4, \ldots$$

En particular, todo número natural menor que un primo es relativamente primo a él, obteniéndose que

$$\phi(n) = n - 1 \quad \textit{si y sólo si} \quad n \textit{ es primo.}$$

A continuación daremos una manera de calcular $\phi(n)$. Empecemos con $\phi(21)$. La cantidad de enteros positivos menores o iguales a 21 es 21; queremos contar cuáles de éstos son coprimos con 21. Por otro lado sabemos que 21 posee como divisores a 1, 3, 7 y 21. Luego los múltiplos de 3 y 7 que no sobrepasen a 21 quedan descartados de nuestro conteo, ya que no son coprimos con 21. Además la cantidad de estos múltiplos puede ser calculada de la siguiente manera: hay tantos múltiplos de 3 como $21/3 = 7$, hay tantos múltiplos de 7 como $21/7 = 3$, etc.

Es decir,

$$\phi(21) = 21 - \frac{21}{3} - \frac{21}{7} + \frac{21}{21} = 12$$

donde el último sumando (que es igual a 1) debe agregarse puesto que 21 fue descontado dos veces: como múltiplo de 3 y de 7.

Ahora tratemos de aplicar el mismo argumento a un número natural $n = p^\alpha q^\beta$ con p, q números primos. Empecemos contando los múltiplos de p y q.

$$\begin{aligned} \text{Múltiplos de } p &= \frac{p^\alpha q^\beta}{p} \\ \text{Múltiplos de } q &= \frac{p^\alpha q^\beta}{q}. \end{aligned}$$

Pero los múltiplos de pq son múltiplos de p y de q simultáneamente, luego ellos están contados dos veces, por lo tanto

$$\begin{aligned} \phi(p^\alpha q^\beta) &= p^\alpha q^\beta - \frac{p^\alpha q^\beta}{p} - \frac{p^\alpha q^\beta}{q} + \frac{p^\alpha q^\beta}{pq} \\ &= p^\alpha q^\beta \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{pq}\right) \\ &= p^\alpha q^\beta \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right). \end{aligned}$$

La fórmula para un número natural n arbitrario se logra a partir de la descomposición primaria de n, cómo sigue.

Teorema I.11. *Si* $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ *es la descomposición primaria de* n *entonces*

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Ejemplo I.16. *Consideremos* $n = 660$. *Su descomposición primaria está dada por* $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. *Aplicando el teorema obtenemos que*

$$\phi(660) = 660\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right).$$

y calculando cada término se obtiene que

$$\phi(660) = 660\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{10}{11}\right) = 160.$$

Para finalizar esta sección daremos la fórmula para un caso especial; el método usado en la demostración es interesante de recordar.

TEOREMA I.12. *Si p es un primo y k es un entero positivo, entonces*

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

En efecto, es evidente que p no divide a n si y sólo si $(n; p^k) = 1$. Además hay p^{k-1} enteros entre 1 y p^k que son divisibles por p, a saber

$$p,\ 2p,\ 3p,\ \ldots, p^{k-1}p.$$

Luego el conjunto $\{1, 2, \ldots, p^k\}$ contiene exactamente $p^k - p^{k-1}$ enteros que son coprimos con p^k.

Una operación natural entre funciones es la llamada *composición*. Esta operación se define de la siguiente manera: si tomamos dos funciones, f y g, de tal manera que el recorrido de f esté contenido en el dominio de g, entonces podemos construir una nueva función, denotada por $g \circ f$, la cual tiene por dominio el dominio de f y la regla que la define consiste en que a cada imagen mediante f se le aplica la regla de g.

Más precisamente, si A es el conjunto dominio de f y a es cualquier elemento de A entonces su imagen $f(a)$ debe estar en el dominio de g; luego le aplicamos a $f(a)$ la regla que define a g; es decir, calculamos $g(f(a))$. Claramente esta definición asegura que el recorrido de $g \circ f$ es un subconjunto del recorrido de g.

En general $g \circ f$ es diferente de $f \circ g$. Mas aún es posible que la primera exista mientras que la segunda no tenga sentido alguno. Examinemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo I.17. **Composición de σ y ϕ.**

Las funciones ϕ y σ definidas con anterioridad poseen como dominio todos los números enteros positivos, y sus recorridos son subconjuntos de los números enteros positivos. Luego podemos formar $\phi \circ \sigma$ y también $\sigma \circ \phi$. Calculemos algunos valores de ellas. Por ejemplo

$$\begin{array}{lclclcl}
(\sigma \circ \phi)(1) & = & \sigma(\phi(1)) & = & \sigma(1) & = & 1 \\
(\sigma \circ \phi)(2) & = & \sigma(\phi(2)) & = & \sigma(1) & = & 1 \\
(\sigma \circ \phi)(3) & = & \sigma(\phi(3)) & = & \sigma(2) & = & 3 \\
(\sigma \circ \phi)(4) & = & \sigma(\phi(4)) & = & \sigma(2) & = & 3 \\
(\sigma \circ \phi)(6) & = & \sigma(\phi(6)) & = & \sigma(3) & = & 4.
\end{array}$$

Mientras que

$$\begin{array}{lclclcl}
(\phi \circ \sigma)(1) & = & \phi(\sigma(1)) & = & \phi(1) & = & 1 \\
(\phi \circ \sigma)(2) & = & \phi(\sigma(2)) & = & \phi(3) & = & 2 \\
(\phi \circ \sigma)(3) & = & \phi(\sigma(3)) & = & \phi(4) & = & 2 \\
(\phi \circ \sigma)(4) & = & \phi(\sigma(4)) & = & \phi(7) & = & 6 \\
(\phi \circ \sigma)(6) & = & \phi(\sigma(6)) & = & \phi(4) & = & 6.
\end{array}$$

Examinando estas tablas se observa claramente que $\phi \circ \sigma$ es diferente de $\sigma \circ \phi$.

I.2.1. Sucesiones. En el capítulo III formalizaremos el concepto de número racional, por ahora entenderemos por número racional una fracción cuyos numerador y denominador son números enteros, con denominador no nulo.

Una sucesión de números racionales es una función que tiene por dominio los números naturales y su recorrido es un subconjunto de los números racionales. Es costumbre denotar una sucesión describiendo el recorrido de ella de la manera siguiente: $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o simplemente por $\{x_n\}_n$. Es decir,

$$x \,:\, \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \qquad \text{con} \quad x(n) = x_n$$

y luego x_n denota la imagen del número natural n mediante la regla definida por la función x.

Por ejemplo $\{x_n\}_n$ donde $x_n = 1/n$ representa la sucesión de números racionales $\{1,\ 1/2\ ,\ 1/3\ ,\ 1/4, \dots\}$.

Ejemplo I.18. **Progresiones aritméticas.**

Consideremos una sucesión $\{x_n\}_n$ donde los elementos x_n se forman de la manera siguiente:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + d,\ x_2 = a + 2d,\ \dots, x_n = a + nd, \dots .$$

Entonces se dice que los números $x_1,\ x_2,\ \dots, x_n,\ \dots$ se encuentran en progresión aritmética. Otra manera de decir esto es que la diferencia de dos términos consecutivos cualesquiera de la sucesión es constante.

Por ejemplo los números $3,\ 5,\ 7,\ 9, \dots$, están en progresión aritmética puesto que la diferencia de dos términos consecutivos es constante e igual a 2. En este caso se tiene que $a = 3$ y $d = 2$.

Ejemplo I.19. **Progresiones geométricas.**

En el caso en que los números dados por la sucesión $\{x_n\}_n$ se rigen por la ley de formación

$$x_0 = a,\ x_1 = ar,\ x_2 = ar^2,\ \dots, x_n = ar^n, \dots$$

se dice que los números $x_1,\ x_2,\ \dots, x_n,\ \dots$ se encuentran en progresión geométrica, es decir si las razones x_{n+1}/x_n de dos términos consecutivos de la sucesión son iguales para todo n. A $r = x_{n+1}/x_n$ se le llama la razón de la progresión.

Por ejemplo los números $3,\ 9,\ 27,\ 81, \dots$, estan en progresión geométrica puesto que $x_{n+1}/x_n = 3$. En este ejemplo $a = 1$ y $r = 3$. En el capítulo II volveremos a estas progresiones.

Ejemplo I.20. **Sucesiones de Fibonacci.**

Consideremos la sucesión de números enteros $\{x_n\}_n$ definida como sigue :

$$x_0 = a,\ x_1 = b,\ x_2 = x_1 + x_0\,, \dots,$$
$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \ \textit{para}\ \ n \geq 0\ .$$

Es decir x_n *, el término n-ésimo, es la suma de los dos términos inmediatamente anteriores.*

Por ejemplo si $a = 1$ y $b = 1$ entonces se obtiene la sucesión de Fibonacci $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}$. En los próximos capítulos las estudiaremos con más detención.

Una sucesión puede tener recorrido finito como es el caso $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x_n = (-1)^n$. Claramente la sucesión asocia a todo número natural par el 1 y a todo impar el -1.

Las funciones aritméticas σ y ϕ también se pueden interpretar como sucesiones de números enteros donde $x_n = \sigma(n)$ y $x_n = \phi(n)$.

I.3. Problemas resueltos

Problema I.1. Encuentre el valor mínimo de la expresión z dada por

$$z = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$$

donde p, q son números enteros positivos.

Solución. Debido a que la expresión z es simétrica en p y q podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p \leq q$.

Aplicando el T.F.A. sabemos que existe un número entero $k \geq 1$ tal que $q = kp + r$, donde r es un número entero con $0 \leq r < p$. Por lo tanto z puede escribirse como sigue:

$$z = k + \frac{r}{p} + \frac{p}{q}.$$

Claramente, el valor mínimo de z se obtiene cuando $k = 1$ y $r = 0$. Luego $q = 1 \cdot p + 0 = p$ y entonces el mínimo de z se obtiene cuando $p = q$ y tal valor es 2.

Problema I.2. Demuestre que el cuadrado de un número entero es de la forma $8n$ o $8n+1$ o $8n + 4$.

Solución. Llamamos z al número entero, luego z puede ser par o impar. Probaremos que en cada uno de estos casos se cumple la tesis.

Primer caso: (z par).

Sea $z = 2k$ con k un número entero. Luego $z^2 = 4k^2$. Para k^2 hay dos posibilidades, par o impar.

a) Si k^2 es par entonces $k^2 = 2p$ donde p es un entero y por lo tanto $z^2 = 4k^2 = 8p$ cumpliéndose lo pedido.
b) Si k^2 es impar entonces $k^2 = 2q + 1$ donde q es un número entero. Luego $z^2 = 4k^2 = 4(2q + 1) = 8q + 1$ obteniéndose lo pedido.

Segundo Caso: (z impar)

En este caso $z = 2r + 1$ con r un número entero. Desarrollando el cuadrado del binomio se obtiene que $z^2 = 4(r^2 + r) + 1 = 4r(r + 1) + 1$. Puesto que el producto de dos números enteros consecutivos es siempre par, se concluye que $r(r + 1) = 2m$ para algún número entero m, obteniéndose que $z^2 = 8m + 1$.

Problema I.3. Pruebe que la ecuación
$$x^3 + 1991y^3 = z^4$$
posee infinitas soluciones x, y, z que son números enteros positivos

Solución. Pensemos primero en encontrar una solución. Experimentemos con $x = y = z$. Entonces x debe satisfacer
$$x^3 + 1991x^3 = x^4$$
de lo cual se obtiene que $x = 1992$.

Entonces el trio $x_0 = 1992$, $y_0 = 1992$, $z_0 = 1992$ es una solución de la ecuación.

Claramente si k es un número entero positivo y u_0, v_0, w_0 es un trío solución de la ecuación entonces el trío k^4u_0, k^4v_0, k^3w_0 es también una solución. Como k es cualquier se ha encontrado una infinidad de ellas.

Problema I.4. Para p y q enteros positivos pruebe que $2^p + 1 = q^2$ implica que $p = q = 3$.

Solución. Notemos que encontrando q se obtiene inmediatamente p y que la igualdad puede ser escrita como: $2^p = (q - 1)(q + 1)$. Esto significa que $(q - 1)$ divide a 2^p. Aplicando el Teorema Fundamental de la Aritmética (T. F. A.) se obtiene que necesariamente $(q - 1)$ es una potencia de 2. En resumen se tiene que $(q - 1) = 2^n$ con $n \leq p$ y por lo tanto la igualdad se transforma en:
$$2^p = 2^n(2^n + 2) = 2^n \cdot 2 \cdot (2^{n-1} + 1) = 2^{n+1}(2^{n-1} + 1).$$
De esta igualdad se deduce que $(2^{n-1} + 1)$ debe ser una potencia de 2 (por T.F.A.) y esto sucede si y solamente si $n = 1$. Por lo tanto $q = 3$ y $p = 3$.

Problema I.5. Para n un número entero mayor que 1 demuestre que $4^n + n^4$ no es primo.

Solución. Si n es par la expresión $z = 4^n + n^4$ es divisible por 2, luego no es primo. Supongamos que $n = 2k + 1$ con k un entero, $k \geq 1$. Entonces: $z = (2^{2k+1})^2 + (n^2)^2$. Sumando $2n^2 2^{2k+1}$ se completa el cuadrado del binomio, es decir
$$z + 2n^2 2^{2k+1} = (2^{2k+1} + n^2)^2$$

Despejando z en esta igualdad se obtiene que:

$$\begin{aligned} z &= (2^{2k+1}+n^2)^2 - 2^{2(k+1)}n^2 \\ z &= (2^{2k+1}+n^2)^2 - (2^{k+1}n)^2 \\ z &= (2^{2k+1}+n^2-2^{k+1}n)\cdot(2^{2k+1}+n^2+2^{k+1}n). \end{aligned}$$

Para finalizar basta con probar que las expresiones de la derecha en la última igualdad son mayores que 1. Claramente la segunda expresión es mayor que uno.

Supongamos que $2^{2k+1}+n^2-2^{k+1}n=1$ entonces se obtiene que $(n-2^k)^2+2^{2k}=1$ lo cual se cumple solamente si $k=0$ lo cual no está permitido por hipótesis.

Problema I.6. Determine todos los números enteros positivos que son soluciones de la ecuación $x^3-y^3=602$.

Solución. Algebraicamente se tiene la descomposición

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

Además $x-y<x^2+xy+y^2$ si x,y son enteros positivos. Notemos que la descomposición primaria de 602 es $602=2\cdot 7\cdot 43$. Se debe resolver entonces

$$\begin{aligned} x-y &= A \\ x^2+xy+y^2 &= B \end{aligned}$$

donde $A<B$, y experimentando con los pares (A,B) posibles $(1,602)$, $(2,301)$, $(7,86)$ y $(14,43)$ se obtiene que el único que produce soluciones enteras es $(2,301)$, a saber $x=11$, $y=9$.

Problema I.7. El producto de tres números pares consecutivos esta dado por $88xxxxx2$ donde cada x representa un dígito. Determine los dígitos faltantes.

Solución. Se tiene que $88\cdot 10^6<(n-2)n(n+2)=n^3-4n<n^3$. Como $440^3<88\cdot 10^6<450^3=91{,}125{,}000$, el número n es superior o igual a 442.

Como tres números pares consecutivos terminan en una de las cinco formas posibles: $0,2,4$ o $2,4,6$ o $4,6,8$ o $6,8,0$ o $8,0,2$, y la única forma en que el último dígito del producto sea 2 es $4,6,8$, resulta que los números son 444, 446 , 448, cuyo producto es 88714752. Los dígitos faltantes son entonces $7,1,4,7$ y 5 .

Problema I.8. Determine los números primos p tal que 2^p+p^2 es primo.

Solución. Observamos que $p=2$ y $p=3$ producen los números 8 y 17, compuesto en el primer caso y primo en el segundo. Luego basta considerar primos $p>2$.

Consideremos congruencia módulo 3. Sabemos que p debe satisfacer una y sólo una de las congruencias siguientes:

$$p \equiv 0\ (3)\ ,\quad p \equiv 1\ (3)\ ,\quad p \equiv -1\ (3).$$

Claramente el primer caso sólo se puede dar si $p = 3$, puesto que de otra manera p sería un número compuesto.

Aplicando las propiedades de congruencia en cualquiera de los dos casos restantes se obtiene que $p^2 \equiv 1\ (3)$.

Por otro lado como $2 \equiv -1\ (3)$ se obtiene $2^p \equiv (-1)^p\ (3)$. Además p es impar luego $2^p \equiv -1\ (3)$.

En resumen, $2^p \equiv -1\ (3)$ y $p^2 \equiv 1\ (3)$. Aplicando las propiedades de las congruencias con respecto a la suma se obtiene finalmente que

$$(2^p + p^2) \equiv 0\ (3).$$

Pero entonces $(2^p + p^2)$ es siempre divisible por 3 si $p > 3$. Luego el único caso es $p = 3$.

Problema I.9. Demuestre que las expresiones

$$2x + 3y\ \ ,\qquad 9x + 5y$$

son divisibles por 17 para los mismos valores enteros x e y.

Solución. Llamemos $w = 2x + y$, $z = 9x + 5y$ a las expresiones dadas. Claramente se tiene que

$$4w + z = 17(x + y).$$

Luego 17 divide a $(4w + z)$. Además si $17|4w$ entonces $17|w$ puesto que $(17; 4) = 1$. Finalmente es claro de la igualdad que $17|w$ si y solamente si $17|z$.

Problema I.10. Considere $n \in \mathbf{N}$ y $\theta(n) =$ número de primos que dividen a n. Pruebe que $n \geq 2^{\theta(n)}$.

Solución. Aplicando el T.F.A. se tiene que

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

donde k es el número de primos que dividen a n, luego $\theta(n) = k$. Como $p_i \geq 2$ para todo $i = 1, \cdots, k$ se tiene que

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \geq 2^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdots 2^{\alpha_k} = 2^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}.$$

Luego

$$n \geq 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}.$$

Como cada $\alpha_i \geq 1$ se tiene que $2^{\alpha_i} \geq 2^1$, para todo $i = 1, \ldots, k$. En resumen

$$n \geq 2^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k} \geq 2^{1 + \cdots + 1} = 2^k = 2^{\theta(n)}.$$

Problema I.11. Determine todos los enteros positivos n para los cuales la expresión $2^n + 1$ es divisible por 3.

Solución. Consideremos congruencia módulo 3. Entonces
$$2 \equiv -1(3) \Rightarrow 2^n \equiv (-1)^n \ (3) \Rightarrow 2^n + 1 \equiv [(-1)^n + 1] \ (3).$$
Luego si n es impar, $2^n + 1 \equiv 0 \ (3)$. Es decir, $2^n + 1$ es divisible por 3 para todo n impar. Además si n es par se obtiene que $2^n + 1 \equiv 2 \ (3)$, luego $2^n + 1$ no es nunca divisible por 3 si n es par.

Problema I.12. Sean a y b números naturales tales que su máximo común divisor es d. Probar que hay exactamente d números del conjunto $\{a, 2a, 3a, \cdots, (b-1)a, ba\}$ que son divisibles por b.

Solución. Si $d = (a; b)$ entonces $d|a$ y $d|b$. Es decir existen enteros r, s tales que $a = rd$ y $b = sd$ con $(r; s) = 1$. Luego el conjunto en cuestión puede describirse como sigue
$$\{rd, 2rd, 3rd, \cdots, (b-1)rd, brd\} = \{krd : k = 1, 2, \cdots, b\}$$
Al dividir cada número del conjunto por $b = sd$ se obtiene resto cero si y solamente si s divide a k (notar que $(r; s) = 1$). Como $b = sd$, esto sucede exactamente d veces.

Problema I.13. Una sucesión de números $a_1, a_2, a_3, \cdots$ es formada de acuerdo a la siguiente regla: $a_1 = 19$, $a_2 = 77$, y para $n > 2$,
$$a_n = \frac{1 - a_{n-1}}{a_{n-2}}.$$
Calcule el término a_{1992} de esta sucesión.

Solución. Como $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$, se tiene que $a_1 + a_2 \neq 1$. Calculemos los primeros términos de la sucesión.
$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1 - a_2}{a_1} \\ a_4 &= \frac{1 - a_3}{a_2} = \frac{(a_1 + a_2 - 1)}{a_1 a_2} \\ a_5 &= \frac{1 - a_1}{a_2} \\ a_6 &= a_1 \ , \ a_7 = a_2, \ldots . \end{aligned}$$
Como cada término sólo depende de los dos inmediatamente anteriores, se sigue que ella se repite en ciclos de cinco términos. Ahora como $1992 \equiv 2(5)$, se tiene que $a_{1992} = a_2 = 77$.

Problema I.14. Sean n y k enteros positivos, con $k \geq 2$ y $n \geq 3$. Demuestre que n^k puede expresarse como la suma de n números impares consecutivos.

Solución. (Arturo Prat W.) Se debe cumplir que dados $n, k \in \mathbb{N}$ existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $n^k = (2a-1) + [(2a-1)+2] + [(2a-1)+4] + \cdots + [(2a-1) + 2(n-1)]$. Como la suma de los números impares es una progresión aritmética podemos escribir $n^k = (2(a-1)+n) \cdot n$, de donde $n^{k-1} = 2a - 2 + n$. Luego

$$a = \frac{n^{k-1} - n + 2}{2} = \frac{n^{k-1} - n}{2} + 1 .$$

Ahora como a debe ser un número entero, queda por demostrar que $n^{k-1} - n$ es divisible por 2, para todo $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 2$. Tenemos dos casos a considerar:

a) Si n es par, entonces n^{k-1} es par, luego $n^{k-1} - n$ es par, por lo tanto divisible por 2.

b) Si n es impar, entonces n^{k-1} es impar, y diferencia $n^{k-1} - n$ es par, luego divisible por 2.

Por lo anterior, se tiene que $n^{k-1} - n$ siempre es divisible por 2, y n^k puede escribirse como una de suma de n números impares consecutivos siendo el primero de ellos $n^{k-1} - n + 1$.

Problema I.15. Sean x, y, z enteros tales que $x^3 + y^3 - z^3$ es múltiplo de 7. Pruebe que uno de esos números es múltiplo de 7.

Solución. (Rodrigo Bahamondes). Sabemos que todo cubo es de una de las siguientes formas: $(7k)^3 = 7m$, $(7k+1)^3 = 7m+1$, $(7k+2)^3 = 7m+1$, $(7m+3)^3 = 7m+6$, $(7m+4)^3 = 7m+1$, $(7m+5)^3 = 7m+6$ o $(7k+6)^3 = 7m+6$.

Realicemos la suma $x^3 + y^3$ módulo 7.

$+$	0	1	6	y^3
0	0	1	6	
1	1	2	0	
6	6	0	5	
x^3				

Luego, restando z^3 de $x^3 + y^3$ mód 7, obtenemos

$-$	0	1	2	6	5	x^3+y^3
0	0	1	2	6	5	
1	1	0	6	2	3	
6	6	5	4	0	1	
z^3						

Si observamos en esta tabla el primer módulo igual a cero, él corresponde a $z^3 = \bar{0}$; el segundo corresponde a $x^3 + y^3 = \bar{1}$: es decir, a $x^3 = \bar{0}$ o $y^3 = \bar{0}$; y el tercero corresponde a $x^3 + y^3 = \bar{6}$: es decir, x^3 o $y^3 = \bar{0}$.

Problema I.16. Sean p y q números enteros positivos, primos entre sí, tales que

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}\,.$$

Demostrar que p es divisible por 1979.

Solución. (Arturo Prat W.) Observemos que $-\dfrac{1}{2k} = \dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{k}$. Luego

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= 1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{1318} - \frac{1}{659} + \frac{1}{1319} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{659}\right) \\
&= \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \frac{1}{662} + \cdots + \frac{1}{1319} \\
&= \frac{1979}{660 \cdot 1319} + \frac{1979}{661 \cdot 1318} + \cdots + \frac{1979}{989 \cdot 990} \\
&= 1979 \left(\frac{1}{660 \cdot 1319} + \frac{1}{661 \cdot 1318} + \cdots + \frac{1}{989 \cdot 990}\right) \\
&= 1979 \cdot \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

donde b es el mínimo común múltiplo desde 660 hasta 1319. Como 1979 es un número primo y no está como factor en a, se tiene que $p = 1979 \cdot \dfrac{a \cdot q}{b}$, y entonces p es divisible por 1979.

Problema I.17. Sea p un número primo, con $p = a^2 - b^2$, a y b positivos. Pruebe que $a = \dfrac{p+1}{2}$ y $b = \dfrac{p-1}{2}$.

Solución. (Cristián García Palomer). Tenemos $p = (a+b)(a-b)$, y como $a + b > a - b$ y p es primo se debe tener que

$$a + b = p\,, \quad a - b = 1\,,$$

de donde

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2}((a+b) + (a-b)) = \frac{1}{2}(p+1) \\
b &= \frac{1}{2}((a+b) - (a-b)) = \frac{1}{2}(p-1)\,.
\end{aligned}$$

Problema I.18. Sea $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$, donde k es un entero positivo tal que $2^k - 1$ es primo. Calcule el número de divisores de N.

Solución. (Cristián García Palomer). Los divisores del primo $p = 2^k - 1$ son 1 y p, y los divisores de 2^{k-1} son $1, 2, \ldots, 2^{k-1}$. Luego, el número de divisores de N es $2k$, siendo ellos $1, 2, \ldots, 2^{k-1}, p, 2p, \ldots, p2^{k-1}$.

Problema I.19. *Olimpíada Nacional 2018* De un libro de 1000 páginas se ha arrancado una cierta cantidad de hojas consecutivas. Se sabe que la suma de los números de las páginas arrancadas es 2018. Determine la numeración de las páginas faltantes.

Solución. Como las hojas faltantes son consecutivas, llamamos $a, a+1, a+2, \ldots, a+(n-1)$ a los números que aparecen en las respectivas páginas de estas hojas. Como cada hoja contiene dos páginas, n debe ser par.

Sumando las numeraciones se obtiene que

$$a + a + 1 + a + 2 + \cdots + a + (n-1) = na + (1 + 2 + \cdots + (n-1)) = 2018\,.$$

Entonces, usando que la descomposición primaria de $2018 = 2 \cdot 1009$, obtenemos

$$na + \frac{(n-1)n}{2} = 2018 \Rightarrow 2na + (n-1)n = 2^2 \cdot 1009\,.$$

De esta manera,

$$n(2a + (n-1)) = 2^2 \cdot 1009\,.$$

Como n es par , $2a + (n-1)$ es impar. y el único divisor impar de $2^2 \cdot 1009$ es 1009.

Luego se debe cumplir que $n = 4$ y $2a + (n-1) = 1009$, cuya solución es $a = 503$.

Por lo tanto la numeración de las páginas faltantes es $503, 504, 505, 506$.

Problema I.20. Se construye el siguiente número: $N = \left(\frac{208}{26}\right)^{2017} \cdot \left(\frac{125}{64}\right)^{673}$. Calcule la cantidad de dígitos que tiene la representación decimal de N.

Solución. Tiene 2.018 dígitos.

Problema I.21. Sea a un número entero positivo. Demuestre que la ecuación $x^2 - y^2 = a^3$ siempre tiene soluciones x e y que son números enteros.

Solución. De la ecuación $x^2 - y^2 = a^3$ se sigue que basta buscar soluciones x_0, y_0 con $x_0 > y_0 \geq 0$.

Escribamos la ecuación anterior en la forma $(x+y)(x-y) = a^2 \cdot a$. Entonces la suma $x + y$ es mayor que la resta $x - y$, y luego tenemos que $x + y = a^2$ y $x - y = a$.

Despejando x , obtenemos $x = \dfrac{a(a+1)}{2}$. Como a es entero, se tiene que $a(a+1)$ es un entero par, y luego x es entero. Ahora despejando y obtenemos $y = \dfrac{a(a-1)}{2}$. Como a es entero, se sigue que $a(a-1)$ es un entero par, y por lo tanto y es un entero.

Capítulo II

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

El conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ es un conjunto de cardinalidad infinita; es decir, posee una cantidad infinita de elementos.

Un razonamiento intuitivamente sencillo para mostrar este hecho es el siguiente: dado $n \in \mathbb{N}$ el número $n + 1$ también pertenece a $\mathbb{N}$, y así sucesivamente. Este proceso de pasar de n a $n + 1$ es el que genera la sucesión de infinitos números naturales. Este esquema de razonamiento, conocido como *Principio de Inducción Matemática* , es quizás uno de los procedimientos fundamentales de la matemática. Aunque por razones históricas se le llama Principio, él se puede demostrar a partir del Principio del Buen Orden.

Como veremos, la inducción matemática es una técnica muy útil para verificar conjeturas matemáticas, a las que se llega por algún procedimiento inductivo. Antes de dar su enunciado procederemos a examinar con detalle un ejemplo de una proposición matemática, establecida por una sucesión de afirmaciones que dependen de $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos la afirmación A_n siguiente

A_n : la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo P_n de $(n + 2)$ lados es igual a $n \cdot 180^o$.

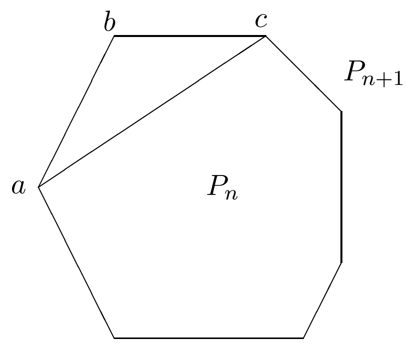
Para verificar si esta afirmación es verdadera, debemos estudiarla para cada $n \in \mathbb{N}$. ¿ Cómo hacer esto ?.

No podemos pensar en hacer la verificación caso por caso, pues existen infinitos números naturales. Tampoco podemos corroborarla para un número limitado de casos, digamos los primeros 1,000 casos, pues la afirmación podría dejar de ser cierta, por ejemplo, para $n = 1{,}001$. Para resolver esta cuestión aplicaremos el Principio de Inducción Matemática (el cual aún no hemos enunciado).

Verifiquemos la validez de nuestra afirmación para los primeros casos. Es claro que ella es válida para $n = 1$, pues en este caso el polígono P_1 es un triángulo, y de la geometría sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180^o = 1 \cdot 180^o$. Para $n = 2$, el polígono P_2 es un cuadrilátero y, dibujando una diagonal, él se descompone en dos triángulos. Como ya vimos que la afirmación era verdadera para triángulos (caso $n = 1$), se tiene entonces que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es $1 \cdot 180^o + 1 \cdot 180^o = 2 \cdot 180^o$.

Para continuar vamos a suponer que nuestra afirmación es válida para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo.

Para el polígono P_{n+1}, el cual tiene $(n+1)+2 = n+3$ lados hacemos lo siguiente: tomamos tres vértices consecutivos, digamos a, b y c como muestra la figura.



Trazamos el segmento de recta que une a con c y de este modo descomponemos P_{n+1} en dos polígonos, a saber, un triángulo P_1 y un polígono P_n de $n+2$ lados.

Aplicando lo ya demostrado para triángulos y que la hipótesis es válida para polígonos de $n+2$ lados (es decir, para P_n), obtenemos que la suma de los ángulos interiores de un polígono de $n+3$ lados es $1 \cdot 180^o + n \cdot 180^o = (n+1) \cdot 180^o$, con lo cual queda probada nuestra afirmación para el caso $n+1$ suponiendo válida la afirmación para n.

A continuación enunciamos el Teorema, llamado Principio de Inducción Matemática, que afirma que lo que se acaba de probar para el ejemplo anterior es suficiente para asegurar que la proposición A_n es cierta para todo número natural n.

TEOREMA II.1. *Supongamos que queremos establecer la verdad de una sucesión de proposiciones matemáticas* $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ *las cuales unidas constituyen una proposición general* A. *Supongamos además que:*

a) *se puede demostrar que la primera proposición* A_1 *es válida.*
b) *es posible demostrar la validez de la proposición* A_{n+1} *a partir de la hipótesis de que la proposición* A_n *es verdadera para un número natural* n *cualquiera; es decir, si se supone que* A_n *es verdadera entonces se demuestra que* A_{n+1} *también lo es.*

Entonces tanto la proposición A *como las proposiciones* A_n *son todas verdaderas.*

Es importante observar que en matemática la demostración por inducción posee, en general, dos partes bien definidas. La primera fase (que en general resulta ser la más complicada) es establecer una *conjetura* o, en otras palabras, el resultado que se quiere probar, y a la cual se llega mediante observaciones y experimentos sucesivos. La segunda, y es aquí donde entra la Inducción Matemática, es la demostración de tal conjetura.

Antes de comenzar con otro ejemplo concreto daremos una breve reseña de un ejemplo histórico que muestra que no siempre las conjeturas son correctas. El gran matemático francés Pierre de Fermat (1601- 1665) observó que los números de la forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ para $n = 1, 2, 3$ y 4 son números primos, y conjeturó que todos los números de esta forma son primos. En esa época no existían computadores para poder visualizarlos y examinarlos con mayor detención.

Para observar la magnitud de estos números, llamados *números de Fermat*, listamos a continuación algunos de ellos, obviamente calculados mediante un computador.

$$
\begin{array}{rcl}
F_1 = 2^{2^1} + 1 & = & 5 \\
F_2 = 2^{2^2} + 1 & = & 17 \\
F_3 = 2^{2^3} + 1 & = & 257 \\
F_4 = 2^{2^4} + 1 & = & 65537 \\
F_5 = 2^{2^5} + 1 & = & 4294967297 \\
F_6 = 2^{2^6} + 1 & = & 18446744073709551617 \\
F_7 = 2^{2^7} + 1 & = & 340282366920938463463374607431768211457 \\
F_8 = 2^{2^8} + 1 & = & 115792089237316195423570985008687907853 \\
 & & 269984665640564039457584007913129639937
\end{array}
$$

La conjetura de Fermat no fué resuelta sino hasta 1732, año en que el célebre matemático alemán Euler demostró que el número

$$F_5 = 2^{32} + 1 = \ 4.294.967.297$$

es divisible por 641 y por lo tanto no es primo. En resumen la conjetura de Fermat resultó ser falsa. Más aún, se ha comprobado que F_n no es primo para $n = 18, 19, 21, 23, 36 \ldots$.

Sin embargo es interesante constatar que los números de Fermat F_n son relativamente primos entre sí: $(F_n; F_m) = 1$ si $n \neq m$, lo cual es otra prueba de que la cantidad de número primos es infinita puesto que la cantidad de números de Fermat es infinita, y por ser coprimos contienen diferentes primos en su factorización primaria.

II.1. Progresiones y sucesiones

En esta sección trabajaremos con las progresiones y sucesiones ya vistas en el capítulo anterior. En particular deduciremos y demostraremos las fórmulas para sumar progresiones, que serán de gran utilidad en los próximos capítulos. Antes de comenzar aclararemos una notación que es común en matemática.

Consideremos una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números. Entonces denotaremos la suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$ mediante el símbolo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n.$$

II.1.1. Progresión geométrica. El objetivo es encontrar una expresión que represente la suma de una progresión geométrica, es decir, para todo natural n consideramos una suma del tipo

$$G_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = \sum_{k=1}^{n} a\,q^k, \quad q \neq 1, \quad a \neq 0.$$

Para solucionar este problema procedemos como sigue:

- Deducción de una fórmula para G_n.
- Probar la validez de la fórmula obtenida mediante inducción matemática.

Multiplicando G_n por q, obtenemos

$$qG_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^n + aq^{n+1},$$

de donde $G_n - qG_n = a - aq^{n+1}$, es decir, $(1-q)G_n = a(1-q^{n+1})$.

Como $q \neq 1$ entonces en la última igualdad se puede dividir por $(1-q)$, obteniéndose que

$$G_n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{II.1}$$

Ya hemos obtenido una fórmula para G_n; probaremos, por inducción, que es válida para un número natural n cualquiera.

a) Para $n = 1$, $G_1 = a(1+q) = a \cdot (1-q^2)/(1-q)$. Luego la fórmula es válida en este caso.

b) Supongamos que la fórmula es válida para n. Entonces para G_{n+1} podemos hacer la siguiente manipulación algebraica

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= (a + aq + \cdots + aq^n) + aq^{n+1} \\ &= G_n + aq^{n+1} \end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis de inducción para G_n, se tiene que

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + aq^{n+1} \\ &= a \cdot \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}(1-q)}{1-q} \\ &= a \cdot \frac{1-q^{n+2}}{1-q}. \end{aligned}$$

Luego por el Principio de Inducción Matemática hemos probado que para cualquier n natural (es decir para cualquier cantidad de sumandos) se tiene

$$\sum_{i=0}^{n} a\, q^i = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{II.2}$$

Por ejemplo si $a = 1$, $q = 2$ y $n = 100$ se obtiene que $G_{100} = 2^{101} - 1$, evitándose de este modo el cálculo de las 100 sumas involucradas.

Por supuesto que la fórmula (II.2) puede ser calculada para sumas que no necesariamente comiencen desde cero, pues si $n > m \geq 1$ entonces

$$\sum_{i=m}^{n} a\, q^i = \sum_{i=0}^{n} a\, q^i - \sum_{i=0}^{m-1} a\, q^i = \frac{a}{1-q}(q^m - q^{n+1})\,.$$

II.1.2. Progresión aritmética. Ahora trataremos de deducir y probar mediante inducción una expresión que represente la suma de una progresión aritmética: para todo natural n y para todo natural d consideramos una suma del tipo

$$A_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+nd).$$

Para deducir su fórmula aplicaremos el siguiente resultado

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{II.3}$$

es decir, la suma de los primeros n números naturales es $n(n+1)/2$, que procedemos a probar. Claramente la proposición es cierta para $n = 1$. Supongamos que (II.3) es cierta para n sumandos. Entonces consideremos la suma de $n+1$ elementos. Por consideraciones algebraicas se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$$

donde en la última igualdad usamos la hipótesis de inducción. Sumando los términos se obtiene lo afirmado. Ahora es inmediato que

$$\sum_{k=0}^{n}(a+kd) = \sum_{k=0}^{n} a + \sum_{k=0}^{n} kd = (n+1)\left(a + \frac{n}{2}\, d\right). \tag{II.4}$$

II.2. Variantes del principio de inducción

El principio de inducción matemática puede ser generalizado un poco más, por ejemplo: si una sucesión de proposiciones $A_s,\ A_{s+1}, \cdots$ es dada, donde s es algún número natural, y si

a) A_s es conocida o demostrada como verdadera, y
b) para cada n mayor o igual que s, la verdad de A_{s+n+1} se sigue por algún argumento matemático de la verdad de A_{n+s},

entonces las afirmaciones $A_s,\ A_{s+1}, \cdots$, son todas verdaderas.

En otras palabras, el principio sigue siendo válido para proposiciones que pueden empezar a partir de un valor s en adelante. Nótese que para $s = 0$ se obtiene el Teorema II.1. Por ejemplo aplicaremos esta versión para demostrar el siguiente resultado,

Ejemplo II.1. *Para todo número natural $n \geq 4$, $n! \geq 2^n$, donde $n!$ denota el número natural $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$.*

Elegimos en este caso $s = 4$. Para el primer elemento $n = 4$ la aseveración es inmediata. Supongamos que la desigualdad es cierta para un n, $n \geq 4$, fijo pero arbitrario. Puesto que $(n+1)! = (n+1)\ n!$, se deduce, aplicando la hipótesis de inducción, que

$$(n+1)! = (n+1)\ n! > (n+1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

lo cual prueba la desigualdad para todo $n \geq 4$.

Otra versión que es de mucha utilidad, como veremos a continuación, es la que reemplaza la condición b) del Teorema II.1 por la condición siguiente

b') Para cada n la verdad de la proposición A_{n+1} se deduce a partir de la validez de las proposiciones A_k para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Esta versión tiene la ventaja de que se puede suponer ciertas todas las proposiciones anteriores a $n+1$ para demostrar la validez de la proposición A_{n+1} . Este segundo principio es equivalente al Teorema II.1.

Como prometimos en el primer capítulo, ahora probaremos los teoremas I.5 y I.6, para lo cual aplicaremos esta última versión del principio de inducción.

El Teorema I.5 del primer capítulo afirma que *Si p_n denota el $n-$ésimo primo entonces*

$$p_n < 2^{2^n}.$$

Demostración. Claramente lo aseverado es cierto para $n = 1$ puesto que 2 es el primer primo y es menor que 4. Supongamos que la afirmación es cierta para $1, 2, \ldots, N$. Es decir nuestra hipótesis de inducción es que

$$p_k < 2^{2^k} \text{ para todo } k = 1, 2, \ldots, N$$

donde, como hemos convenido, p_k representa el k-ésimo primo. Definamos el número $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots p_N + 1$. Como ya vimos en la demostración del Teorema I.4, q no es divisible por ninguno de los primos $p_1, p_2 \ldots, p_N$. Luego por el T.F.A. debe ser divisible por un primo mayor que p_N . Se deduce que el primo p_{N+1} , que es el primo inmediatamente mayor que p_N , debe ser menor o igual que q . Por lo tanto, aplicando la hipótesis de inducción para cada k , $k \leq N$ se tiene que

$$p_{N+1} \leq q = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots p_N + 1 < 2^{2^1} \cdot 2^{2^2} \cdot \cdots 2^{2^N} + 1$$

Usando el hecho que $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^N$ es una progresión geométrica de razón 2 se obtiene que

$$p_{N+1} < 2^{2^{(N+1)}}.$$

Luego el Principio de Inducción asegura que la propiedad se cumple para todo número natural n .

Evidentemente que esta estimación de la cantidad de primos menores que el número 2^{2^n} no es muy precisa. Por ejemplo, para $n = 3$ el Teorema I.5 asegura que hay a lo menos tres números primos menores que $2^8 = 256$, pero en la práctica sabemos que que hay muchos más.

Uno de los primeros intentos importantes para tratar de dar una respuesta más exacta fue publicada en 1851 por el matemático ruso P. L. Chebyshev, y afirma que la cantidad de números primos menores que un número x es cercano al valor de $x(\log x)^{-1}$ cuando x es muy grande. Tal conjetura fue propuesta por Gauss en 1791 cuando tenía la edad de 14 años. La demostración rigurosa de tal afirmación fue finalmente provista por Hadamard 40 años después.

Una pequeña variación en la demostración anterior nos permite probar que

Hay infinitos números primos de la forma $4n + 3$.

Es decir, hay infinitos números primos en la progresión aritmética $4n+3$. Los números primos 3, 7, 11 y 19 son algunos de ellos y los elementos 9 y 15 de tal progresión aritmética no son números primos.

Demostración. La demostración consiste en tomar los primeros k números primos y construir el número $q = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot p_4 \cdots p_k - 1$. Claramente, como ya hemos visto, q es un número que no es divisible por ningún primo menor o igual a p_k , y es de la forma $q = 4n - 1$.

Además, se probó en la sección de congruencias que todo número entero es de la forma $4n$ ó de la forma $4n+1$ ó $4n+2$ ó $4n+3$ (ó $4n-1$)). Aplicando el T.F.A. a q deducimos que los primos que lo dividen deben ser mayores que p_k y que no todos ellos pueden ser de la forma $4n + 1$ debido a que el producto de números de este tipo se expresa como

$$(4n + 1)(4m + 1) = 4(4nm + n + m) + 1,$$

el cual posee la misma forma (notar que los casos $4n$ y $4n+2$ quedan excluidos puesto que ellos no representan números primos). Luego necesariamente q debe tener como divisor a un número primo mayor que p_k de la forma $4n + 3$.

II.2.1. Sucesiones de Fibonacci. En el capítulo anterior, sección 1.6, las definimos en general. Los valores que ella asume están determinados por sus dos primeros elementos. Tomemos el caso en que $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Es decir, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión definida por

$$x_1 = 1\,,\ x_2 = 1 \ \text{ y } \ x_n = x_{n-1} + x_{n-2}\ ;\ n \geq 3.$$

Ejemplo II.2. Para todo n número natural se tiene que

i) x_n, x_{n+1} son coprimos, es decir, $(x_n \; ; \; x_{n+1}) = 1$
ii) $x_n < (7/4)^n$.

Solución. Aplicaremos el Principio de Inducción. En efecto, para $n = 1$ se tiene, $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$, por lo tanto $(x_1; x_2) = 1$. Supongamos ahora que, $(x_n; x_{n+1}) = 1$. Si $(x_{n+1}; x_{n+2}) = d$, con $d > 1$, entonces como se tiene $x_n = x_{n+2} - x_{n+1}$, se sigue que d debe ser un factor común de x_n y x_{n+1} , lo cual es una contradicción.

Luego, $(x_{n+1}; x_{n+2}) = 1$ y por el Principio de Inducción Matemática la proposición es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para la segunda parte escribamos $P(n)$ la proposición ii) y $\alpha = \dfrac{7}{4}$. Tenemos que $x_1 = x_2 = 1 < \alpha$, luego $P(1)$ y $P(2)$ son verdaderas.

Observemos que si a es un racional tal que $a > 1$ entonces $a^n < a^{n+1}$, para todo entero $n \geq 0$ (lo cual es fácil de probar por inducción). Aplicando este resultado a $\alpha = \dfrac{7}{4}$ y usando la definición de la sucesión y la hipótesis de inducción, obtenemos

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} < \alpha^n + \alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(1 + \alpha) < \alpha^{n-1}\,\alpha^2 = \alpha^{n+1}\,.$$

Para que la demostración esté completa, falta verificar que $1+\alpha < \alpha^2$; es decir, $1+(7/4) < (7/4)^2$, lo cual es fácil de comprobar.

II.3. Ejercicios de Inducción

1. Pruebe que la desigualdad
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\,\sqrt{n}$$
es válida para todo n número natural.

2. Pruebe que $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es divisible por $x + y$ para todo n número natural.

3. Considere la expresión $C_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. Encuentre una fórmula para C_n y pruébela por inducción.

4. (Torres de Hanoi) Se construye un sistema de tres estacas y n anillos, todos de diferente radio externo, que se pueden encajar en cada una de las estacas. No se permite mover un anillo de una estaca a otra sobre un anillo de menor radio. La configuración inicial consiste en una torre de anillos, donde todas los anillos están en una sola estaca y ordenados de mayor a menor radio, el menor encima de todos. Pruebe que con 2^n-1 movimientos permitidos se puede trasladar la torre completa a otra estaca.

5. Pruebe que $4^n \geq n^2$ para todo n número natural.

6. Demuestre que para todo número natural n
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} .$$

7. Para cada número natural $n \geq 1$ se define la suma siguiente:
$$S(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} .$$
Pruebe que para todo $n \geq 2$ se cumple que
$$S(1) + S(2) + S(3) + \cdots + S(n-1) + n = n \cdot S(n) .$$

8. Encuentre una fórmula para la suma
$$\frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \cdots + \frac{n}{10^n}$$
y pruébela por inducción.

9. Pruebe que para todo número natural $n > 1$ se tiene
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{n^2} > 1$$

10. Pruebe que para cada n número natural
$$1 - \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} - \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} + \ldots \pm 1 = 0.$$

11. Pruebe que para todo número natural $n \geq 2$, la siguiente suma
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
no es un número entero.

II.4. Problemas resueltos

Problema II.1. Sea $\{x_n\}_n$ la sucesión definida por $x_1 = x_2 = 1$ y $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ para $n \geq 2$. Pruebe que
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_{n+2} - 1 .$$

Solución. Primero, para $n = 1$ se tiene que $x_1 = x_3 - 1 = 2 - 1 = 1$. Por lo tanto la igualdad es válida para este caso.

Supongamos que la igualdad anterior es cierta para $n \geq 2$. Vamos a probar que ella sigue siendo válida para $n + 1$. Asumamos entonces la hipótesis de inducción
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_{n+2} - 1 .$$

Por propiedad asociativa de la suma, se tiene la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}.$$

Aplicando la hipótesis de inducción al sumando $\sum_{i=1}^{n} x_i$, se obtiene finalmente que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} x_i &= x_{n+2} - 1 + x_{n+1} \\ &= (x_{n+1} + x_{n+2}) - 1 \\ &= x_{n+3} - 1.\end{aligned}$$

Problema II.2. Pruebe que la igualdad

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$$

es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Definamos $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$. Entonces

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}.$$

Ahora si definimos $v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n+1}$ obtenemos que

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}.$$

De lo anterior, se deduce que $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n$.

Se busca probar que $u_n = v_n$ para todo n.

Claramente esta proposición es cierta para $n = 1$. Supongamos que es verdadera para $m \in \mathbb{N}$, esto es, $u_m = v_m$. Entonces de $u_{m+1} - u_m = v_{m+1} - v_m$, se sigue que $u_{m+1} = v_{m+1}$, que es la proposición para $m + 1$.

Problema II.3. Pruebe que para cada $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n} - 3n - 1$ es un número divisible por 9.

Solución. Definamos $P(n) = 2^{2n} - 3n - 1$. Es inmediato que $P(1) = 0$ y puesto que 0 es divisible por 9, la proposición es cierta para $n = 1$.

Supongamos que la proposición es verdadera para $n = k$, esto es, asumamos que $P(k)$ es divisible por 9.

Para $n = k + 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}P(k+1) - P(k) &= 2^{2(k+1)} - 3(k+1) - 1 - (2^{2k} - 3k - 1) \\ &= 2^{2k} \cdot 2^2 - 3k - 1 - 2^{2k} + 3k + 1 \\ &= 2^{2k} \cdot 3 - 3 \\ &= 3(2^{2k} - 1)\end{aligned}$$

Se observa que $2^{2k}-1=4^k-1=(3+1)^k-1$. Aplicando el binomio de Newton (ver demostración en próximo capítulo), se obtiene que

$$(3+1)^k-1=3^k+3^{n-1}\binom{n-1}{1}+\ldots+3\binom{n}{n-1}+1-1=3l,$$

para algún entero l.

Pero entonces $P(k+1)-P(k)=3\cdot 3l=9l$. Luego se obtiene lo pedido puesto que $P(k+1)=P(k)+9l$ y $P(k)$ es divisible por 9.

Problema II.4. Para cada $n\in\mathbb{N}$ pruebe que

$$\binom{2n}{n}<2^{2n}\ .$$

Solución. (Arturo Prat W.) Recordemos el Teorema del Binomio de Newton. Dados números reales a y b, para cada entero positivo n se tiene

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\,,\qquad \text{donde}\qquad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,.$$

Aplicando lo anterior, tenemos

$$\begin{aligned}2^{2n}=(1+1)^{2n} &= \binom{2n}{0}1^{2n}1^0+\binom{2n}{1}1^{2n-1}1^1+\cdots+\binom{2n}{2n}1^01^{2n}\\ &= \binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}+\binom{2n}{2}+\cdots+\binom{2n}{2n}\,.\end{aligned}$$

Como la suma de los números $\binom{2n}{k}$, para $k=0,1,2,\ldots,2n$, es 2^{2n}, y cada uno de estos números es positivo es evidente que $\binom{2n}{n}<2^{2n}$.

Problema II.5. Encuentre los valores de $n\in\mathbb{N}$ tales que S_n divide a P_n, donde $S_n=\sum_{i=1}^{n} i$ y $P_n=n!$.

Solución. (Cristián García Palomer). Tenemos que

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} i\ =\ \frac{n(n+1)}{2}\qquad \text{y}\qquad P_n=n!=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\,.$$

Ahora, para que $\dfrac{P_n}{S_n}$ sea un número entero, se debe tener que

$$\frac{P_n}{S_n}=\frac{2n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n(n+1)}=\frac{2(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n+1)}$$

sea un número entero. Los factores de $n+1$ se encuentran en $2(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$, excepto si $n+1$ es primo. Por lo tanto se cumple para todo n tal que $n+1$ es compuesto y también para $n=1$.

Problema II.6. Sean $|x| < 1$ y $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Demuestre que $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$.

Solución. Tenenos que $(1-x)^n > 0$ y $(1+x)^n > 0$. Sea
$$\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) (1-x)^i (1+x)^{n-i}.$$
Notemos que $(1-x)^n + (1+x)^n < ((1-x)+(1+x))^n$. En efecto, se sabe que
$$2^n = ((1-x)+(1+x))^n = (1-x)^n + \alpha + (1+x)^n$$
y como $\alpha > 0$, vemos que $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$; esto es, 2^n es mayor, en α, que $(1-x)^n + (1+x)^n$.

Capítulo III

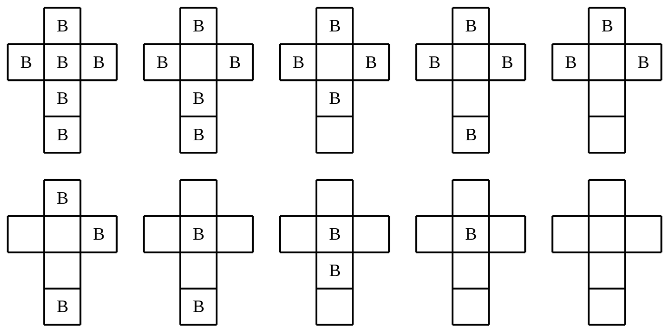
ELEMENTOS DE COMBINATORIA

Comencemos este capítulo con un pequeño cuento que apareció en el diario El Austral de Temuco el domingo 8 de mayo de 2016.

*El abuelo Anacleto, matemático retirado, disfruta sus tardes haciendo pensar a sus nietos y a los amigos de estos con acertijos y problemas. "**¿Cuántas maneras tenemos para pintar las caras de una moneda con dos colores, blanco y negro?**" les pregunta el abuelo a los niños. Rápidamente los chicos gritan todos los números y razonamientos que se les vienen a la mente: "¡una!" dice Raquel "blanco por un lado y negro por el otro", "¡No, son dos!" contesta Jorge "te falta negro por un lado y blanco por el otro". El abuelo les aclara que en realidad es lo mismo, porque la moneda que él imagina es igual por ambos lados. Además, él permite que la moneda se pueda pintar completa del mismo color. "¡Diecisiete!", propone Diego y todos ríen. De pronto Sofía, tranquilamente, revela la solución correcta "**tres: ambos lados blancos, ambos lados negros y un lado de cada color**". Todos asienten. El abuelo les cuenta de la importancia de la simetría en el arte y el diseño, pero Sofía no está contenta. "**¿Qué pasa si tienes tres colores para pintar la misma moneda? ¿y cuatro colores? ¿y cinco colores?**". El abuelo sonríe y responde rápidamente: "son seis, diez y quince posibilidades". Todos lo miran sorprendidos, pues no saben que el abuelo conoce una fórmula general para resolver el problema con cualquier cantidad de colores. Sofía no se queda tranquila: "**¿Y qué pasa si queremos pintar las caras de un cubo con dos colores?**". El abuelo calla, piensa un rato y los invita a todos a tomar helados. Eso de seguro le dará tiempo de encontrarle respuesta a la pregunta de Sofía.*

Más allá del hecho que todos nosotros conocemos gente igual o más curiosas que Sofía[1], la pregunta hecha por ella es simple, entretenida y permite hacerse preguntas matemáticamente interesantes. Por supuesto que es posible hacer un dibujo para responder a la pregunta de Sofía: son 10 posibilidades, en base a los diagramas siguientes (la B denota las caras pintadas de blanco y las otras, negras).

[1]Posiblemente muchos de nuestros lectores se sienten identificados... ciertamente el autor lo siente.



Evidentemente esta solución podría habérsele ocurrido a cualquiera. El problema de la solución a través de un dibujo es que esta no es particularmente esclarecedora: no es fácil entender qué está detrás de ese número 10. Para ejemplificar esta falta de claridad, le contamos al lector que si Sofía hubiese formulado la misma pregunta con 3 colores, la respuesta hubiera sido 57 posibilidades y con 4 colores, 240 posibilidades. La idea de este capítulo es entender cómo aparecen estos números.

III.1. Principios combinatorios básicos

Las preguntas más fundamentales de combinatoria se responden a través de dos reglas elementales

Regla de la suma: Si cierto objeto A puede ser escogido de m maneras, y otro objeto B puede ser escogido de n maneras, entonces hay $m+n$ maneras de escoger A o B.

Regla de la multiplicación: Si el objeto A se puede escoger de m maneras y si, después de cada una de estas elecciones el objeto B se puede escoger de n modos, la elección del par (A, B) en el orden indicado se puede efectuar de mn formas.

Estas reglas quedan fácilmente ejemplificadas a la hora de vestirnos en la mañana. Si uno tiene 4 pares de calcetines blancos y 6 pares de calcetines negros, entonces por la regla de la suma uno tiene $6+4=10$ posibilidades para elegir qué par de calcetines se pondrá hoy. Por otro lado si uno tiene 5 camisas y 3 corbatas, entonces tiene disponibles $5 \cdot 3 = 15$ posibilidades de combinar sus camisas con sus corbatas.

Ambas reglas se pueden combinar para resolver ejercicios bastante más complejos que los anteriores.

Ejemplo III.1. ¿De cuántas maneras se pueden escoger dos fichas de dominó, de las 28 que hay, de forma que se pueda aplicar una a la otra (es decir, de modo que se encuentre el mismo número de tantos en ambas fichas)?

Solución. Podemos escoger una ficha de dominó de 28 maneras. En 7 casos la ficha será doble, es decir, tendrá tantos $0-0$, $1-1$, $2-2$, $3-3$, $4-4$, $5-5$, $6-6$ y en 21 casos será una ficha con dos números de tantos distintos. Teniendo separados estos dos casos, por la regla de la suma, basta conocer cuántas combinaciones hay en cada clase y sumar los dos números.

Si la primera elección fue de la primera clase, es decir una ficha doble, la segunda ficha se puede elegir de 6 maneras para que resulte aplicable a la anterior (por ejemplo, si en el primer paso fue elegida la ficha $1-1$, en el segundo se puede tomar una de las fichas $1-0$, $1-2$, $1-3$, $1-4$, $1-5$, $1-6$). Según la regla del producto hay $7\cdot 6=42$ combinaciones *ordenadas* de la primera clase; pero como el orden es irrelevante al enunciado del problema, el primero de los números buscados es $\frac{1}{2}\cdot 42=21$. Si la primera elección fue de la segunda clase, la segunda ficha se puede elegir de 12 maneras (por ejemplo, para la ficha $3-5$ servirán las fichas $0-3$, $1-3$, $2-3$, $3-3$, $3-4$, $3-6$, $0-5$, $1-5$, $2-5$, $4-5$, $5-5$, $5-6$). Por la regla del producto obtenemos $21\cdot 12=252$ *parejas ordenadas* (es decir, la pareja $3-5$, $4-5$ aparece dos veces, a saber: $(3-5,4-5)$ y $(4-5,3-5)$). El segundo número buscado es, entonces, $\frac{1}{2}\cdot 252=126$. Según la regla de la suma, la solución del problema es $21+126=147$. Hay 147 maneras de elegir dos fichas de dominó de forma que se pueda aplicar una a la otra.

Un ejemplo más general, y bastante útil, que usa la regla de la multiplicación es el siguiente.

Ejemplo III.2. Dados k objetos distintos, ¿cuántos conjuntos hay que contengan $0,1,2,\ldots,$ ó k objetos entre ellos?

Solución. Para resolver este problema basta darse cuenta de que si se ordenan los k objetos en lugares $1,2,3,\ldots,k$, entonces definir un subconjunto dado equivale a dar una sucesión de k ceros y/o unos: los ceros indican los objetos que no pertenecen y los unos los objetos que pertenecen al subconjunto. Por ejemplo, si $k=5$, entonces $(0,1,0,1,0)$ denota el conjunto $\{2,4\}$. Finalmente, por la regla de la multiplicación, como la primera elección se puede hacer de dos maneras (cero o uno), la segunda de dos maneras, etc., la última de dos maneras, resulta que el número de subconjuntos es $2\cdot 2\cdots 2=2^k$ incluyendo el conjunto vacío que corresponde a la elección $(0,0,0,\ldots,0)$). En resumen, un conjunto de k objetos tiene 2^k subconjuntos.

Las reglas de la suma y del producto se pueden entender de manera sencilla en el contexto de la teoría de conjuntos. Si A es un conjunto con m elementos, escribiremos $\#A=m$. Como es usual, denotaremos por $A\cup B$ la *unión* de A y B, y por $A\times B$ su *producto cartesiano*. En estos términos, vemos que

Regla de la suma: Si A y B son dos conjuntos disjuntos con $\#A=m$ y $\#B=n$, entonces $\#(A\cup B)=m+n$.

Regla de la multiplicación: Si A y B son dos conjuntos con $\#A=m$ y $\#B=n$, entonces $\#(A\times B)=mn$.

Por otro lado, si A y B tienen k elementos en su intersección, entonces su unión $A\cup B$ tiene $m+n-k$ elementos. Este enunciado, en su forma más general, se llama *fórmula de inclusiones y exclusiones*. Acá la formulamos en dos maneras igualmente útiles:

Teoría de conjuntos: Si $A_1, \dots, A_n$ son conjuntos no necesariamente disjuntos, entonces $\# A_1 \cup \cdots \cup A_n$ está dado por

$$\sum_{i=1}^{n} \# A_i - \sum_{1 \le i < j \le n} \#(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \#(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

Combinatoria: Supongamos que se tienen N objetos, algunos de los cuales poseen las propiedades $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Cada objeto puede, o bien poseer una o varias de estas propiedades, o bien no poseer ninguna. Denotaremos por $N(\alpha_i \alpha_j \cdots \alpha_k)$ la cantidad de objetos que poseen las propiedades $\alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_k$ (y puede ser que algunos posean algunas otras también). Denotamos con una "prima" las veces que se necesiten contar los objetos que *no* poseen una propiedad. Por ejemplo, $N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4')$ es el número de objetos que poseen las propiedades α_1 y α_2, pero no poseen la propiedad α_4. Así

$$N(\alpha_1' \cdots \alpha_n') = N - \sum_{i=1}^{n} N(\alpha_i) + \sum_{1 \le i < j \le n} N(\alpha_i \alpha_j) - \cdots + (-1)^n N(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$$

Ejemplo III.3. ¿Por qué razón ha sido rechazado como inexacto el informe que se exhibe a continuación?

"En el curso estudian 45 escolares, de los cuales 25 son niñas. 30 escolares tienen notas de bueno y sobresaliente, entre ellos, 16 niñas. 28 alumnos practican el deporte, habiendo entre ellos 18 niñas y 17 escolares que tienen notas de bueno y sobresaliente. 15 niñas tienen notas de bueno y sobresaliente y al mismo tiempo practican el deporte."

Solución. La razón de la inconsistencia de los datos se hace aparente al tratar de averiguar cuántas niños no practican el deporte y obtienen a veces notas inferiores a bueno. Denotemos por α_1 la pertenencia al sexo femenino, por α_2 las buenas calificaciones y por α_3 la afición al deporte. Las condiciones del problema dicen entonces:

$$N(\alpha_1) = 25,\ N(\alpha_2) = 30,\ N(\alpha_3) = 28,$$
$$N(\alpha_1\alpha_2) = 16,\ N(\alpha_1\alpha_3) = 18,\ N(\alpha_2\alpha_3) = 17,$$
$$N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = 15.$$

Pero, según la fórmula de inclusiones y exclusiones, debe tenerse:

$$N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3') = 45 - 25 - 30 - 28 + 16 + 18 + 17 - 15 = -2,$$

lo cual, obviamente, no puede ser.

Finalmente, enunciamos otro principio muy simple y muy importante: el *principio del palomar*. También es a veces llamado *principio de los casilleros* y *principio de Dirichlet*.

Principio del palomar: Si dispone de n palomares y hay m palomas, y si $m > n$, entonces habrá un palomar que aloja al menos dos palomas.

Un ejemplo simple de cómo usar este principio es el hecho que existen dos personas en Santiago que tienen *exactamente* la misma cantidad de pelos en sus cabezas. Es sabido que, en promedio, los humanos tienen 150,000 pelos en sus cabezas. Es seguro entonces suponer que nadie tiene más de $n = 1{,}000{,}000$ de pelos en su cabeza. La aseveración sigue por el principio del palomar, dado que en Santiago hay alrededor de $m = 7{,}000{,}000$ de personas.

Un ejemplo más sofisticado es el que sigue.

Ejemplo III.4. Pruebe que de un conjunto de diez números distintos de dos dígitos (entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), es posible seleccionar dos subconjuntos cuyos elementos tienen igual suma.

Solución. Para resolver este problema, aun sin saber cuáles son los diez números, cabe notar que la suma máxima de los diez números es $90 + 91 + 92 + \cdots + 99 = 945$. La suma de un subconjunto de los diez números debe ubicarse entonces en *uno de los* 945 *casilleros* $1, 2, 3, 4, \ldots, 945$. Así, basta averiguar cuántos subconjuntos tiene un conjunto de 10 objetos cualesquiera, sin contar el subconjunto vacío, pues en nuestro caso no sabríamos hacer la suma. Que este número es $2^{10} - 1 = 1{,}023$ sigue del ejercicio III.2. Como $1{,}023 > 945$, el problema queda resuelto por el principio del palomar.

III.2. Otras situaciones combinatorias

Usando los principios básicos estudiados en la sección anterior, es posible encontrar una gran cantidad de fórmulas que se aplican en variados contextos y problemas. Un enfoque bastante popular para describir los problemas típicos que hemos comenzado a resolver es el llamado *muestreo*: supongamos que tenemos una caja que contiene n bolas distinguibles entre sí, marcadas de 1 a n. Se procede a extraer k bolas de esta caja bajo diferentes condiciones. Cada una de estas condiciones entregan situaciones combinatorias diferentes.

A continuación, vamos a listar algunos de estos resultados y explicaremos cómo fueron deducidos.

III.2.1. Variaciones con repetición. Si se tienen objetos de n tipos (en cantidad ilimitada) y a partir de ellos se forman todas las filas posibles de largo k, considerándolas distintas si difieren en el tipo de objetos o si difieren en su orden, el número total de *variaciones* es, según la regla del producto, n^k. Esta fórmula es una generalización directa de lo hecho en el ejemplo III.2, donde $n = 2$.

El número descrito se designa por $\overline{V}_k^n$ y se llama número de *variaciones con repetición de k objetos de n tipos*. Se tiene, pues,

$$\overline{V}_k^n = n^k.$$

En términos de muestreo, las variaciones con repetición de k objetos de n tipos corresponden a la condición: se extrae una bola de la caja y se anota su número. A continuación se devuelve la bola a la caja. Enseguida se saca otra, se anota su número y se devuelve a la caja. Se repite este procedimiento k veces, obteniéndose una lista ordenada de números

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ donde a_i denota el número de la i-ésima bola extraída. Cada una de estas listas se llama una *muestra ordenada con reposición.* El número total de estas muestras ordenadas con reposición es, entonces, $\overline{V}_k^n = n^k$.

Ejemplo III.5. Los ciclistas tienen aversión por los números cero (porque es ovalado) y ocho (porque así quedan las ruedas tras los accidentes). ¿Cuántos socios puede inscribir un club de ciclistas si a cada uno debe entregarle una identificación de tres cifras, sin usar 0 ni 8?

Solución. Este problema pide encontrar el número de triples ordenados de objetos de ocho tipos, a saber $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$. Observando que cada identificación de tres cifras es una muestra ordenada con reposición, obtenemos la respuesta $\overline{V}_3^8 = 8^3 = 512$. El club puede inscribir 512 socios. Nótese que si no fueran supersticiosos podrían inscribir 1.000 socios.

III.2.2. Variaciones sin repetición. Como antes, se tienen objetos de n tipos (pero ahora sólo uno de cada tipo) y a partir de ellos se forman todas las filas posibles de largo k, considerándolas distintas si difieren en el tipo de objetos o si difieren en su orden. Como la elección del primer objeto de la fila puede ser hecha de n maneras distintas, la elección del segundo objeto puede ser sólo de $n-1$ maneras, la del tercero sólo de $n-2$ maneras y, finalmente, la del k-ésimo objeto sólo de $n-(k-1) = n-k+1$ maneras. Así se obtiene, por la regla de la multiplicación, que el número total de *variaciones sin repetición de k objetos de n tipos*, denotado V_k^n, es

$$V_k^n = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

En el contexto de muestreo, la condición es la misma que antes, salvo que la bola extraída en cada etapa no se repone a la caja. Cada una de las sucesiones $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tiene ahora k números distintos y se llama una *muestra ordenada sin reposición.* El número total de muestras ordenadas sin reposición es, entonces, V_k^n.

Ejemplo III.6. La Sociedad de Matemática de Chile tiene N socios activos. Entre ellos se elige la mesa del Directorio, compuesta por el Presidente, el Vicepresidente, el Secretario, el Tesorero y tres Directores. ¿De cuántas maneras puede quedar compuesta la mesa el próximo año?

Solución. Se entiende que una persona puede ocupar solamente un cargo y, por lo tanto, el problema corresponde a una variación sin repetición de 7 objetos de N tipos. Así, el número pedido es

$$V_7^N = N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)(N-6).$$

III.2.3. Permutaciones. El caso $k = n$ de las variaciones sin repetición es particularmente importante. En este caso se tienen objetos de n tipos, uno solo de cada uno, esto es, n objetos diferentes. Se trata de encontrar el número de maneras de poner los n objetos en fila; en este caso, es claro que lo único que puede distinguir una fila de la otra es el orden. De acuerdo a lo recién visto, el número total de variaciones sin repetición de

n objetos de n tipos, llamadas simplemente *permutaciones de n objetos distintos* , es

$$P_n = V_n^n = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!\ .$$

Cabe notar que, con la introducción del símbolo $n!$ para el *factorial de n*, la expresión para V_k^n puede escribirse de la forma algebraicamente más simple

$$V_k^n = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

En el caso en que $n = k$, para que esta expresión coincida con la de P_n se debe convenir que $0! = 1$.

Ejemplo III.7. Encuentre todas las ordenaciones posibles de las tres letras a, b, c.

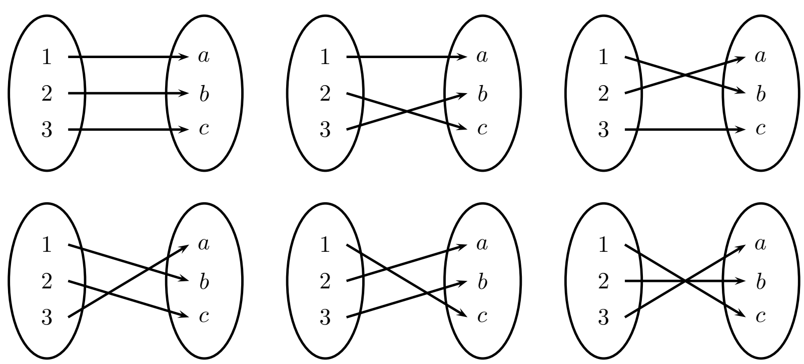
Solución. La respuesta es $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ y las ordenaciones son las siguientes: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Una interpretación muy relevante de las permutaciones es en términos de funciones. Dado un conjunto A de n elementos, existe una función biyectiva $f\colon \{1,\dots,n\} \to A$. El número de todas estas funciones es precisamente P_n. Para ver esto, note que:

- Cada elección de una función biyectiva $f\colon \{1,\dots,n\} \to A$ entrega una manera de ordenar los elementos de A: $f(1), f(2), \dots, f(n)$.
- Dos funciones biyectivas diferentes, entregan dos maneras diferentes de ordenar los elementos de A.
- Toda lista ordenada de los elementos de A corresponde a una única función biyectiva.

Ejemplo III.8. Usando funciones biyectivas, interprete el resultado del ejemplo III.7.

Solución. Considere los siguientes seis diagramas:



Ejemplo III.9. ¿Cuántas funciones diferentes existen con dominio un conjunto de k elementos y con codominio un conjunto de n elementos?

Solución. $\overline{V}_k^n = n^k$.

III.2.4. Permutaciones cíclicas. A continuación estudiaremos un caso particular de la técnica de conteo que veremos en detalle en la sección III.4.

Una *permutación cíclica* es una variación sin repetición de n objetos distintos dispuestos no en una fila, sino en un círculo. Si cada una de las $n!$ permutaciones se enrolla en un círculo, de manera que el inicio de la fila quede junto al final de la misma, se obtienen $n!$ permutaciones cíclicas *que no son todas distintas*, pues se pueden rotar para hacer coincidir una con otras. Como hay n rotaciones posibles, resultan $(n-1)!$ grupos distintos, cada uno de los cuales contiene n permutaciones distintas que se deben ahora identificar. En suma, el número de permutaciones cíclicas de n objetos distintos, denotado por C_n, es

$$C_n = (n-1)!\,.$$

Por ejemplo, si una mesa redonda tiene cinco lugares enumerados de 1 a 5, entonces hay

$$P_5 = 5! = 120$$

maneras distintas de sentar cinco personas a esta mesa. Por otra parte, si se ignora la numeración de los asientos lo que distingue una variación de otra es solamente la vecindad relativa entre personas. En este caso, hemos visto que el número de maneras de sentar cinco personas a esta mesa es

$$C_5 = (5-1)! = 24.$$

Para obtener las permutaciones cíclicas a partir de las permutaciones se puede razonar como sigue: Tómese una permutación cualquiera, es decir, una asignación de las cinco personas a los cinco lugares numerados, y, enseguida, hágase rotar a las personas, de manera que cada uno pase a ocupar, por ejemplo, el asiento ubicado a su derecha. Es claro que esta operación puede repetirse cinco veces hasta que cada persona vuelva al sitio del cual partió. Las cinco maneras diferentes de sentarse a una mesa numerada se convierten en una sola manera cuando se ignora la numeración. Las 120 permutaciones iniciales se convierten entonces en $120/5 = 24$ maneras distintas de sentar cinco personas a una mesa redonda sin numeración de los asientos.

El caso general que estudiaremos en la sección III.4 tiene precisamente este mismo comportamiento: al considerar simetrías del problema, la cantidad posible de combinaciones se reduce. Nótese que lo mismo ocurre con el problema de Sofía, pues sin considerar las rotaciones espaciales del cubo, esta figura podría pintarse de $2^6 = 64$ maneras, sin embargo, ya vimos que son sólo 10 posibilidades.

III.2.5. Permutaciones con repetición. Supongamos que se tienen n objetos agrupados en k tipos diferentes. Más precisamente, asumiremos que se tienen n_1 objetos del primer tipo, n_2 objetos del segundo tipo, y así sucesivamente hasta considerar n_k objetos del k-ésimo tipo, donde

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k.$$

Las variaciones de estos n objetos, es decir las filas de largo n formadas por los n objetos, llamadas *permutaciones con repetición* son menos de $n!$, pues muchas de las $n!$ permutaciones son iguales entre sí debido a que hay objetos repetidos. Su número total se denota por $V^n_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$.

Si se considera una de las permutaciones de los n objetos, los n_1 objetos del primer tipo pueden ser permutados entre sí de $n_1!$ maneras, sin cambiarlos del conjunto de n_1 lugares que ocupan; independientemente, se puede hacer lo mismo con los n_2 objetos del segundo tipo de $n_2!$ maneras, y así sucesivamente. Por la regla del producto, los elementos de la permutación inicial se pueden intercambiar de $n_1!n_2!\cdots n_k!$ maneras, manteniendo aún esta permutación invariable. Como todo lo anterior es válido para cualquiera de las $n!$ permutaciones, el conjunto de ellas se separa en partes formadas por $n_1!n_2!\cdots n_k!$ permutaciones iguales cada una. Por consiguiente, el número de permutaciones con repeticiones diferentes que se puede escribir a partir de los elementos dados es

$$V^n_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \,.$$

Ejemplo III.10. ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra "Combarbalita"?

Solución. En la palabra dada se tiene una letra C, una letra O, una letra M, dos letras B, tres letras A, una letra R, una letra L, una letra I y una letra T. En total tenemos

$$n = 1+1+1+2+3+1+1+1+1 = 12 \text{ letras}$$

Así, el número total de palabras es entonces

$$V^{12}_{1,1,1,2,3,1,1,1,1} = \frac{12!}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 11! = 39{,}916{,}800 \,.$$

En el contexto de muestreo, las permutaciones con repetición se llaman *permutaciones de n bolas distinguibles por grupos*. Para aclarar el análisis hecho, examinamos un ejemplo simple.

Consideremos $n = 5$, con tres bolas blancas ($n_1 = 3$) y dos negras ($n_2 = 2$). Las 10 configuraciones diferentes que se obtienen son:

● ● ○ ○ ○	○ ● ● ○ ○	○ ○ ● ● ○
● ○ ● ○ ○	○ ● ○ ● ○	○ ○ ● ○ ●
● ○ ○ ● ○	○ ● ○ ○ ●	○ ○ ○ ● ●
● ○ ○ ○ ●		

Para contar en este ejemplo, procederemos del modo siguiente: ya sabemos que la cantidad de permutaciones de 5 elementos distinguibles es 5!. Notemos que para una configuración cualquiera de la lista los 3 elementos de color blanco se pueden desordenar de 3! maneras sin cambiar la configuración inicial. Debido a que ésta es la observación fundamental, la examinaremos más detenidamente.

Tomemos la configuración $\bullet \ \circ \ \bullet \ \circ \ \circ$. En las posiciones $2, 4, 5$ hay bolas de color blanco, las cuales denotaremos por b_2, b_4 y b_5, respectivamente. Con esto las hemos distinguido momentáneamente. Con estas tres bolas distintas podemos formar 3! permutaciones diferentes de ellas. Cada una de estas 3! permutaciones de las bolas blancas produce las combinaciones

$$\begin{array}{ccc} \bullet \ b_2 \ \bullet \ b_4 \ b_5 & \bullet \ b_4 \ \bullet \ b_2 \ b_5 & \bullet \ b_5 \ \bullet \ b_4 \ b_2 \\ \bullet \ b_2 \ \bullet \ b_5 \ b_4 & \bullet \ b_4 \ \bullet \ b_5 \ b_2 & \bullet \ b_5 \ \bullet \ b_2 \ b_4 \end{array}$$

Puesto que las bolas blancas, en realidad, no son distinguibles entre í, estas $3! = 6$ combinaciones producen siempre la misma configuración $\bullet \ \circ \ \bullet \ \circ \ \circ$. Similarmente se tiene que hay 2! maneras de desordenar las bolas negras sin cambiar la configuración inicial.

Es así como cada configuración, si la consideramos como una combinación, se repite $3! \cdot 2!$ veces, y entonces la cantidad x que se busca debe satisfacer la ecuación $3! \cdot 2! \cdot x = 5!$, es decir,

$$x = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10.$$

Siguiento la misma línea de desarrollo se puede deducir la fórmula general que ya hemos obtenido.

III.2.6. Combinaciones. No siempre interesa el orden en que se distinguen los objetos en una variación. Cuando no interesa el orden de los elementos en la variación, sino solamente su composición, se dice que se trata de una *combinación*.

Se tienen n objetos distintos y a partir de ellos se forman todas las filas posibles de k objetos, distinguiéndolas solamente si contienen objetos distintos, pero no cuando difieren sólo en el orden. Tales combinaciones se llaman *combinaciones de k entre n objetos*. El número de estas combinaciones se denota por $\binom{n}{k}$ y se llama también *símbolo combinatorio* o *coeficiente binomial*. Resulta claro del contexto que debe tenerse $0 \leq k \leq n$. Si cada una de las $\binom{n}{k}$ combinaciones se dispone en todos los órdenes posibles, y hay $k!$ de ellos, resulta el número de variaciones sin repetición, es decir

$$k!\binom{n}{k} = V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

En el contexto de muestreo, se habla de *muestreo sin orden y sin reposición*: en este caso no se devuelven las bolas a la caja ni tampoco importa el orden en que aparecen. Esto corresponde, por ejemplo, al caso en que de un total de n bolas se ha tomado un puñado de k bolas, y no una tras otra hasta completar k, como en el muestreo ordenado. Así pues, el número de muestras de k bolas entre n sin orden ni reposición es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ .$$

Cabe observar que éste es exactamente el número de subconjuntos de cardinalidad k que tiene un conjunto de cardinalidad n. Como hemos visto en el ejemplo III.2 que tal conjunto tiene 2^n subconjuntos, cada uno de los cuales tiene cardinalidad 0 ó 1 ó 2. . . ó n, resulta que

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n\ .$$

También observamos la siguiente propiedad de simetría que está perfectamente a la vista en la fórmula obtenida para los coeficientes binomiales:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}\ .$$

Esta igualdad tiene sentido combinatorio, pues cada subconjunto de cardinalidad k determina un único subconjunto de cardinalidad $n-k$ dado por su complemento. En otras palabras, hay tantos subconjuntos de cardinalidad k como subconjuntos de cardinalidad $n-k$.

III.3. Binomio de Newton

Todos estamos familiarizados con los productos notables:

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2 \quad , \quad (x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$$

En general, si x e y son indeterminadas, entonces las potencias de $x+y$ con exponente entero no negativo se pueden obtener a través de potencias de x y de y gracias al *teorema del binomio de Newton*. Podemos completar la lista anterior, agregando dos casos más simples, a saber

$$(x+y)^0=1 \quad , \quad (x+y)^1=x+y.$$

Es fácil observar que los coeficientes que acompañan cada monomio que aparece en estos desarrollos son el inicio del llamado triángulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Aquí, para obtener cada una de las filas, ubicamos un 1 a cada extremo y en cada uno de los sitios interiores colocamos la suma de los dos números de la fila superior más cercanos a dicho sitio. Por ejemplo, el triángulo de Pascal continua creciendo de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

Debido simplemente a la ley de distributividad del producto con respecto a la suma, para desarrollar

$$(x+y)^n=(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

se deben multiplicar "todos con todos", lo que producirá monomios del tipo $x^n, x^{n-1}y$, $\ldots, x^{n-k}y^k, \ldots, y^n$. El monomio $x^{n-k}y^k$ aparecerá muchas veces; de hecho, tantas veces cuantas posibilidades hay de elegir $n-k$ veces la letra x y k veces la letra y en el proceso de "todos con todos".

Para calcular de cuántas maneras se obtiene el monomio $x^{n-k}y^k$, basta calcular de cuántas maneras se pueden elegir los k factores $(x+y)$ entre los n que hay (para extraer de ellos la letra y). Hemos visto que este número es $\binom{n}{k}$, y de aquí resulta que

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \cdots + \binom{n}{n}y^n.$$

Varias consecuencias interesantes tiene esta fórmula, llamada *fórmula del binomio de Newton*, entre ellas

- La simetría del coeficiente binomial aparece nuevamente: elegir las k letras y equivale a elegir las $n-k$ letras x.
- La relación algebraica $(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n$ que hay entre $(x+y)^{n+1}$ y $(x+y)^n$ genera una relación entre los coeficientes binomiales $\binom{n+1}{k}$ para los distintos k y $\binom{n}{k}$ para los suyos. Esta relación puede obtenerse en términos de combinatoria como sigue: Si se tienen $n+1$ objetos y se *marca* uno de ellos, entonces los $\binom{n+1}{k}$ subconjuntos de cardinalidad k quedan separados en dos partes complementarias: los que contienen el elemento marcado y los que no lo contienen.

  Los subconjuntos que contienen el elemento marcado son aquellos obtenidos adjuntando el elemento marcado a un subconjunto de cardinalidad $k-1$ del conjunto de n objetos no marcados. Hay $\binom{n}{k-1}$ de éstos. Por su parte, los subconjuntos que no contienen el elemento marcado son los subconjuntos de cardinalidad k del conjunto de n elementos no marcados. Hay $\binom{n}{k}$ de ellos. Así se obtiene, en suma, que
  $$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$
  Para los escépticos, esta igualdad se puede demostrar simplemente de manera simbólica. A saber
  $$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}\\ &= \frac{n!((n-k+1)+k)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

  Esta fórmula, junto con los hechos $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ para todo n, permite obtener la fila de coeficientes de $(x+y)^{n+1}$ a partir de la fila de coeficientes de $(x+y)^n$. Constituye así una demostración de que los elementos de las filas del triángulo de Pascal, construido por la regla de "sumar los vecinos superiores", son efectivamente los coeficientes binomiales.

Ejemplo III.11. Demuestre que la siguiente igualdad es válida para todo n natural:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0\ .$$

Solución. Por el teorema del binomio de Newton, vemos que la suma anterior es nada más que la expansión término a término de

$$(1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0\ .$$

Ejemplo III.12. Encuentre el coeficiente independiente de x en la expansión de $\left(\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{1}{x^2}\right)^{25}$.

Solución. Usando la fómula del binomio de Newton, sabemos que

$$\left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^{25} = \sum_{k=0}^{25} \binom{25}{k} \left(\frac{x^3}{2}\right)^{25-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{25} \binom{25}{k} (-1)^k 2^{k-25} x^{75-5k}$$

Luego, el término libre de x corresponde a $75 - 5k = 0$, es decir, $k = 15$. En dicho caso,

$$\binom{25}{15}(-1)^{15} 2^{15-25} x^{75-5\cdot 15} = \frac{-1}{2^{10}} \binom{25}{15} = -\frac{408595}{128}\ .$$

Ejemplo III.13. Determine el valor de k si los coeficientes de x^k y de x^{k+1} en el desarrollo de $(3x+2)^{34}$ son iguales.

Solución. Usando la fómula del binomio de Newton, sabemos que

$$(3x+2)^{34} = \sum_{k=0}^{34} \binom{34}{k} (3x)^k 2^{34-k} = \sum_{k=0}^{34} \binom{34}{k} 3^k 2^{34-k} x^k$$

Luego, el valor de k buscado satisface

$$\binom{34}{k} 3^k 2^{34-k} = \binom{34}{k+1} 3^{k+1} 2^{34-k-1}$$

que es equivalente a la ecuación

$$\frac{34!}{k!(34-k)!} 3^k 2^{34-k} = \frac{34!}{(k+1)!(34-k-1)!} 3^{k+1} 2^{34-k-1}$$

la cual tras simplificaciones simples se convierte en

$$\frac{2}{34-k} = \frac{3}{k+1} \qquad \Longrightarrow \qquad k = 20.$$

Concluimos este capítulo explicando la ya anunciada relación que explica cómo la simetría de un problema reduce las posibles combinaciones.

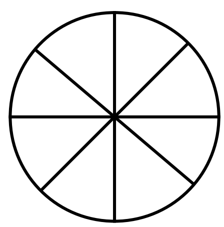
III.4. Fórmula de Pólya/Lema de Burnside

El problema típico consiste en contar un conjunto de variaciones del cual ciertos subconjuntos se reducen a una sola variación a través de la acción de un grupo. Las acciones de grupos es la manera en que los matemáticos logran codificar las simetrías de un objeto.

III.4.1. Grupos finitos. Un *grupo finito* es un conjunto $G = \{e, R_1, R_2, \ldots, R_m\}$ provisto de una operación asociativa, de un elemento neutro e y de un inverso para cada uno de sus elementos. La operación se denota como multiplicación, el inverso de R_i se denota por R_i^{-1}. Una manera conveniente de describir un grupo es a través de una *tabla de multiplicación*. Esta tabla se construye de la siguiente manera: En la primera fila y la primera columna se ubican los elementos del grupo y en la entrada $(i+1, j+1)$, donde $1 \leq i, j \leq m$, se ubica el producto $R_i \cdot R_j$.

Algunos ejemplos importantes de grupos se listan a continuación.

- Grupos de rotaciones en el plano: El conjunto $\mathrm{Rot}(n)$ de todas las rotaciones en múltiplos de $\dfrac{360°}{n}$ en torno a un punto. Estos grupos son útiles para trabajar con problemas de ruletas, por ejemplo, para la siguiente ruleta



  tomamos $n = 8$, y obtenemos el grupo $\mathrm{Rot}(8)$ formado por las rotaciones en $0°$, $45°$, $90°$, $135°$, $180°$, $225°$, $270°$ y $315°$. Si las denotamos por $e, R_1, \ldots, R_7$, respectivamente, obtenemos la siguiente tabla:

$\cdot$	e	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
e	e	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
R_1	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	e
R_2	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	e	R_1
R_3	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	e	R_1	R_2
R_4	R_4	R_5	R_6	R_7	e	R_1	R_2	R_3
R_5	R_5	R_6	R_7	e	R_1	R_2	R_3	R_4
R_6	R_6	R_7	e	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
R_7	R_7	e	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6

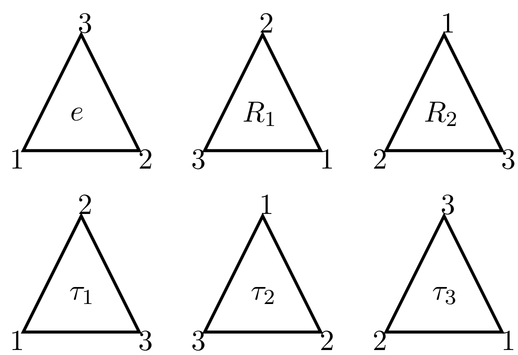
  Por ejemplo, en la posición $(4, 6) = (3+1, 5+1)$, vemos el resultado del producto $R_3 \cdot R_5$, que corresponde a hacer primero una rotación en $225°$ y luego una rotación en $135°$, es decir, obtenemos una rotación en $225° + 135° = 360°$ que es lo mismo que no rotar, es decir, $R_3 \cdot R_5 = e$.
- Grupos diedrales: Estos son los grupos de simetrías de polígonos regulares. Para el caso de un n-ágono regular, el grupo diedral D_n consiste en todas las rotaciones

en múltiplos de $\dfrac{360°}{n}$ en torno al centro del polígono y n reflexiones respecto de rectas. La naturaleza geométrica de estas reflexiones dependen de si n es par o impar:

- Si n es impar, entonces las rectas que definen las reflexiones pasan por un vértice del polígono y el punto medio de la arista opuesta a dicho vértice.
- Si n es par, entonces hay $\frac{n}{2}$ reflexiones definidas por rectas que pasan por vértices opuestos y $\frac{n}{2}$ reflexiones definidas por rectas que pasan por los puntos medios de aristas opuestas.

Ejemplo III.14. Encuentre las tablas de multiplicación de los grupos D_3 y D_4.

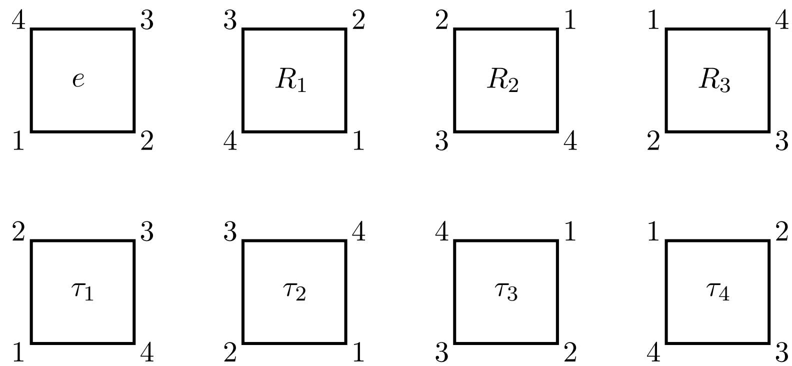
Solución. Si enumeramos los vértices de un triángulo equilátero, los elementos del grupo diedral $D_3 = \{e, R_1, R_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ se muestran en el siguiente diagrama:



Usando la convención usada al componer funciones, podemos geométricamente obtener la siguiente tabla de multiplicación:

$\cdot$	e	R_1	R_2	τ_1	τ_2	τ_3
e	e	R_1	R_2	τ_1	τ_2	τ_3
R_1	R_1	R_2	e	τ_3	τ_1	τ_2
R_2	R_2	e	R_1	τ_2	τ_3	τ_1
τ_1	τ_1	τ_2	τ_3	e	R_1	R_2
τ_2	τ_2	τ_3	τ_1	R_2	e	R_1
τ_3	τ_3	τ_1	τ_2	R_1	R_2	e

Similarmente, si enumeramos los vértices de un cuadrado, los elementos del grupo diedral $D_4 = \{e, R_1, R_2, R_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$ se muestran en el siguiente diagrama:

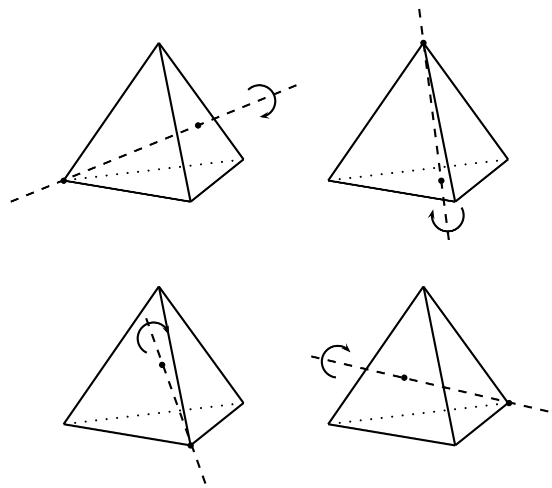


Tal como antes, obtenemos la siguiente tabla de multiplicación:

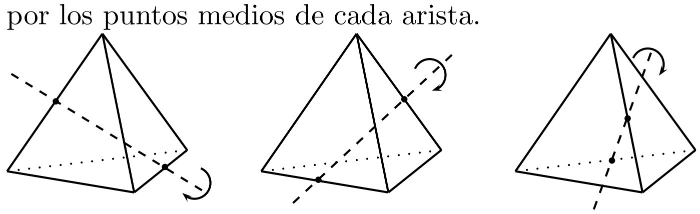
$\cdot$	e	R_1	R_2	R_3	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
e	e	R_1	R_2	R_3	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
R_1	R_1	R_2	R_3	e	τ_2	τ_3	τ_4	τ_1
R_2	R_2	R_3	e	R_1	τ_3	τ_4	τ_1	τ_2
R_3	R_3	e	R_1	R_2	τ_4	τ_1	τ_2	τ_3
τ_1	τ_1	τ_4	τ_3	τ_2	e	R_3	R_2	R_1
τ_2	τ_2	τ_1	τ_4	τ_3	R_1	e	R_3	R_2
τ_3	τ_3	τ_2	τ_1	τ_4	R_2	R_1	e	R_3
τ_4	τ_4	τ_3	τ_2	τ_1	R_3	R_2	R_1	e

Observe que en los grupos diedrales la propiedad conmutativa ya no es válida en general, es decir, el orden de los factores puede alterar el producto. Un resultado interesante es que los grupos $\mathrm{Rot}(8)$ y D_4, a pesar de que tienen el mismo número de elementos, son *estructuralmente* diferentes: uno es conmutativo y el otro no.

- Grupos de rotaciones espaciales: Estos grupos, que son más difíciles de describir, son muy interesantes para estudiar ejemplos. Son solamente 3 y corresponden a las simetrías de los sólidos platónicos. Por razones de comodidad, sólo explicaremos cómo se obtienen estos grupos para el caso del tetraedro y del cubo. Lo haremos de manera esquemática. Los lectores están cordialmente invitados a hacer cuantos dibujos sean necesarios.
  - $\mathscr{A}_4$: el grupo de rotaciones de un tetraedro regular. Tiene 12 elementos.
    - La identidad.
    - Una rotación en 120° y una rotación en 240° por cada vértice, respecto de un eje que pasa por dicho vértice y el centro de la cara opuesta.

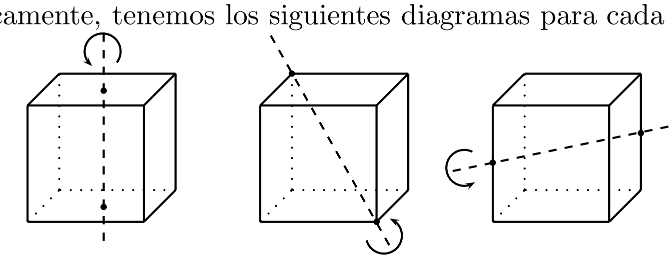


  - Una rotación en 180° por cada par de aristas opuestos, respecto de un eje que pasa por los puntos medios de cada arista.



- S_4: el grupo de rotaciones de un cubo. Tiene 24 elementos.
  - La identidad.
  - Una rotación en 90°, una rotación en 180° y una rotación en 270° por cada par de caras opuestas, respecto de un eje que pasa por los centros de las caras.
  - Una rotación en 120° y una rotación en 240° por cada par de vértices opuestos, respecto de un eje que pasa por los dichos vértices.
  - Una rotación en 180° por cada par de aristas opuestas, respecto de un eje que pasa por los puntos medios de dichas aristas.

  Esquemáticamente, tenemos los siguientes diagramas para cada situación



  Para el caso de un octaedro regular, el grupo es el mismo, pero la descripción geométrica es diferente. Esta queda como ejercicio para el lector.
- $\mathscr{A}_5$: el grupo de rotaciones de un dodecaedro o de un icosaedro regular. Tiene 60 elementos.

III.4.2. Acciones de grupo. Un grupo G *actúa sobre un conjunto* X si a cada $g \in G$ y cada $x \in X$ está asociado un único elemento de X, denotado por $g.x$, tal que se tenga:

1. Si e es el elemento neutro de G, $e.x = x$ para todo $x \in X$.
2. Si $g_1, g_2 \in G$ y $g_1 \cdot g_2 \in G$ es su producto en G, entonces, para todo $x \in X$,
$$(g_1 \cdot g_2).x = g_1.(g_2.x).$$

Recordemos el ejemplo de Sofía. La idea era pintar con dos colores las caras de un cubo. En este caso, X es el conjunto de todos los cubos pintados con dos colores sin considerar las posibles rotaciones. Dado que cada cara puede tener dos colores, por el principio multiplicativo, X tendría $2^6 = 64$ elementos. Si $x \in X$ es uno de estos cubos pintados y $g \in S_4$ es una de las rotaciones del cubo descritas anteriormente, entonces $g.x \in X$ es el cubo pintado que se obtiene rotando x según la rotación g. Las propiedades (1) y (2) se verifican por inspección.

Ahora estudiaremos en detalle la ecuación $g.x = x$, para $g \in G$ y $x \in X$.

En primer lugar, si se elige $g \in G$ fijo, entonces el conjunto de las configuraciones $x \in X$ que satisfacen la ecuación dada para este g, se denota por $\mathrm{Fix}(g)$ y sus elementos se dicen *fijos bajo la acción de* g. Explícitamente escribimos
$$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \colon g.x = x\}.$$

En segundo lugar, si se elige $x \in X$ fijo, entonces el conjunto de los $g \in G$ que satisfacen la ecuación dada para este x, se denota por Stab_x y se conoce como el *estabilizador de* x. Explícitamente escribimos
$$\mathrm{Stab}_x = \{g \in G \colon g.x = x\}$$

Se debe notar que $\mathrm{Fix}(g) \subseteq X$ es simplemente un subconjunto de X, en cambio, $\mathrm{Stab}_x \subseteq G$ es un *subgrupo* de G. En efecto, de las propiedades (1) y (2) de la definición de acción de grupo, se deduce que Stab_x es también un grupo, con la operación heredada de G.

Por último, consideremos, para un $x \in X$ fijo, el conjunto de todos los elementos de X que se obtienen como $g.x$ para los distintos $g \in G$. Este conjunto se denota por $G.x$ y se llama la *órbita de* x *bajo la acción de* G, es decir,
$$G.x = \{g.x \colon g \in G\} \subseteq X.$$

En el ejemplo de Sofía, x es uno de los cubos pintados, de modo que $G.x$ es el conjunto de todos los cubos pintados que se obtienen a partir de x por las distintas rotaciones de S_4. Como éstas son precisamente las configuraciones que se deben identificar, resulta que el número 10 que obtuvimos dibujando es, justamente, el *número de órbitas*.

Para que nuestros cálculos y argumentos queden fundamentados bastará entonces demostrar el teorema siguiente (frecuentemente llamado lema de Burnside, que es un caso particular del llamado *teorema de enumeración de Pólya*):

Teorema III.1. *Sea* G *un grupo finito con* n *elementos que actúa en un conjunto finito* X*. Entonces* X *se particiona en órbitas y el número de órbitas es* $\frac{1}{n}\sum_{g\in G} \#\mathrm{Fix}(g)$.

La demostración completa de este Teorema se encuentra en casi todos los libros de teoría básica de grupos, por ejemplo, en el libro de Rotman *An introduction to the Theory of Finite Groups*, y puede ser reconstruida como sigue. Se trata simplemente de contar el número de elementos del conjunto

$$\{(g,x) \in G \times X : g.x = x\}$$

de dos maneras distintas. La primera es contar cuántas x hay para cada $g \in G$. Como este número es, según nuestra definición $\#\mathrm{Fix}(g)$, resulta que el número de elementos en cuestión es

$$\sum_{g \in G} \#\mathrm{Fix}(g) \ .$$

La segunda manera es contar cuántas g hay para cada $x \in X$. Es fácil convencerse que este número es $\#\mathrm{Stab}_x$, de manera que el número pedido es

$$\sum_{x \in X} \#\mathrm{Stab}_x \ .$$

La teoría de grupos (bien elemental) se usa ahora para expresar el segundo número de una manera más conveniente. Los pasos son los que siguen:

En primer lugar, se demuestra que si x_1 y x_2 están en una misma órbita, entonces $\#\mathrm{Stab}_{x_1} = \#\mathrm{Stab}_{x_2}$. Para establecer este paso, basta mostrar una biyección entre ambos estabilizadores, siendo suficientes para ello las definiciones que hemos dado.

Se tiene, así, que hay muchos sumandos repetidos en el número $\sum_{x \in X} \#\mathrm{Stab}_x$.

En seguida, y también bastan nuestras definiciones para ello, se demuestra que las órbitas de G particionan X, es decir, X es la unión disjunta de todas las órbitas.

Con esto, la suma $\sum_{x \in X} \#\mathrm{Stab}_x$ puede separarse en sumas que corresponden a órbitas: un sumando para cada órbita, sumando que es de la forma $\sum_{x \in G.x_1} \#\mathrm{Stab}_{x_1}$. Pero, por la primera obsrvación, esta última suma consiste de sumandos iguales y es, en consecuencia, $\#\mathrm{Stab}_{x_1} \cdot \#G.x_1$.

Se tiene así que la suma total es de la forma

$$\#\mathrm{Stab}_{x_1} \cdot \#G.x_1 + \cdots + \#\mathrm{Stab}_{x_t} \cdot \#G.x_t$$

donde t es el número de órbitas.

El último paso involucra un resultado muy básico en teoría de grupos, llamado *Teorema de Lagrange*. Con él y un poquito más, se ve que $\#\mathrm{Stab}_{x_1} \cdot \#G.x_1 = n$, independiente de x_1.

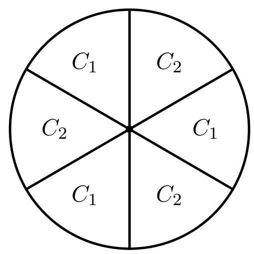
En consecuencia $t \cdot n = \sum_{x \in X} \#\mathrm{Stab}_x = \sum_{g \in G} \#\mathrm{Fix}(g)$, de donde resulta que t, el número de órbitas, es el que afirma el teorema.

III.5. Problemas resueltos

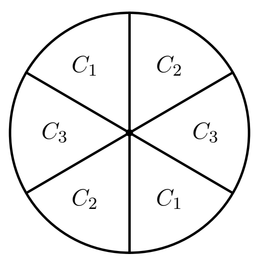
Problema III.1. Si se tiene una ruleta de seis compartimentos, ¿de cuántas maneras se puede pintar esta ruleta si se dispone de colores blanco, azul y rojo?

Solución. Consideramos el grupo $\mathrm{Rot}(6) = \{e, R_1, \ldots, R_5\}$ de seis elementos actuando en el conjunto X formado por todas las maneras en que se pueden pintar los compartimentos de la ruleta, sin considerar las rotaciones. Por la regla de la multiplicación, vemos que $\#X = 3^6$.

Las ruletas pintadas que quedan fijas bajo la acción de la identidad son todas las 3^6 ruletas. Aquellas ruletas que quedan fijas bajo la acción de R_1 ó $R_5 = R_1^{-1}$ son solamente las ruletas pintadas de un solo color. Asimismo, las ruletas que quedan fijas bajo la acción de R_2 ó $R_4 = R_2^{-1}$ son de la forma



donde C_1 y C_2 son cualquiera de los tres colores. Así, por la regla de la multiplicación, hay $3^2 = 9$ ruletas pintadas de esa forma. Similarmente, las ruletas que quedan fijas bajo la acción de R_3 son de la forma



donde C_1, C_2 y C_3 son cualquiera de los tres colores. Así, por la regla de la multiplicación, hay $3^3 = 27$ ruletas pintadas de esa forma.

En resumen, vemos que

$$\#\mathrm{Fix}(e) = 3^6 \quad , \quad \#\mathrm{Fix}(R_1) = 3 \quad , \quad \#\mathrm{Fix}(R_2) = 3^2$$
$$\#\mathrm{Fix}(R_3) = 3^3 \quad , \quad \#\mathrm{Fix}(R_4) = 3^2 \quad , \quad \#\mathrm{Fix}(R_5) = 3.$$

Usando el lema de Burnside, tenemos que hay

$$\frac{1}{6}(3^6 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^2 + 3) = \frac{1}{6} \cdot 780 = 130$$

posibles ruletas pintadas de tres colores.

Problema III.2. ¿De cuántas maneras se puede pintar una ruleta con un número primo p de compartimentos si se dispone de a colores?

Solución. Este ejercicio es una versión simplificada del problema anterior. Para resolverlo, notamos primero que el grupo a considerar es $\mathrm{Rot}(p) = \{e, R_1, \ldots, R_{p-1}\}$, el cual posee p elementos. Este grupo actúa en el conjunto X de todas las posibles ruletas con p compartimentos coloreadas con a colores. Por la regla de la multiplicación, vemos que X tiene a^p elementos.

Dado que p es un número primo, vemos que cada R_i fija sólo las a ruletas pintadas del mismo color, para $1 \leq i \leq p-1$, es decir, $\#\mathrm{Fix}(R_i) = a$. Por otra parte, la identidad fija todas las ruletas pintadas, es decir, $\#\mathrm{Fix}(e) = a^p$. Así, por el lema de Burnside, tenemos que hay

$$\frac{1}{p}(a^p + \underbrace{a + \cdots + a}_{p-1 \text{ veces}}) = \frac{1}{p}(a^p + (p-1)a) = \frac{1}{p}(a^p - a) + a$$

posibles maneras de colorear la ruleta.

Puesto que el número $\frac{1}{p}(a^p - a)$ debe ser un entero, obtenemos el siguiente:

Corolario III.1 (Pequeño teorema de Fermat). *Sea p un número primo y sea a un número natural. Se tiene que p divide $a^p - a$ o, equivalentemente,*

$$a^p \equiv a \mod p.$$

Problema III.3. Determine el número de dados tetraedrales.

Solución. Sea X el conjunto de tetraedros con caras numeradas del 1 al 4. Por la regla de la multiplicación, X tiene $4! = 24$ elementos. El grupo actuando en X es el grupo $\mathscr{A}_4$ de rotaciones del tetraedro, que tiene 12 elementos.

Es fácil ver que, dado que todas las caras están enumeradas con números diferentes, el único elemento de $\mathscr{A}_4$ que tiene configuraciones fijas es la identidad. Más precisamente, tenemos que $\#\mathrm{Fix}(e) = 4!$, sin embargo, si $g \in \mathscr{A}_4$ y $g \neq e$:

$$\#\mathrm{Fix}(g) = 0.$$

Se sigue que hay

$$\frac{1}{12}(4! + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{11 \text{ veces}}) = \frac{24}{12} = 2$$

posibles dados tetraedrales diferentes.

Problema III.4. Determine cuántas maneras hay de pintar las caras de un cubo con m colores.

Solución. Sea X el conjunto de cubos con caras pintadas, con m colores disponibles. Por la regla de la multiplicación, el conjunto X tiene m^6 elementos. El grupo actuando en X es el grupo S_4 de rotaciones del cubo, que tiene 24 elementos.

Para contar la cantidad de configuraciones fijas por las distintas rotaciones, las separamos como antes:

- La identidad fija las m^6 configuraciones
- Las rotaciones en $90°$ y en $270°$ por cada par de caras opuestas fijan m^3 configuraciones: cada cara por donde pasa el eje de rotación de un color y las restantes cuatro caras de un mismo color.
- Las rotaciones en $180°$ por cada par de caras opuestas fijan m^4 configuraciones: cada cara por donde pasa el eje de rotación de un color y cada par de caras opuestas de las restantes cuatro de un mismo color.
- Las rotaciones en $120°$ y en $240°$ por cada par de vértices opuestos fijan m^2 configuraciones: cada una de las tres caras que coinciden en uno de los vértices por donde pasa el eje de rotación deben tener el mismo color.
- Las rotaciones en $180°$ por cada par de aristas opuestas fijan m^3 configuraciones: los pares de caras que comparten aristas por donde pasa el eje de rotación deben tener el mismo color y las caras opuestas restantes también.

En resumen, se tienen

$$\frac{1}{24}(m^6+6m^3+3m^4+8m^2+6m^3)=\frac{1}{24}(m^6+3m^4+12m^3+8m^2)$$

posibles maneras de colorear las caras de un cubo con m colores. Evaluando, obtenemos

$$\frac{1}{24}(2^6+3\cdot 2^4+12\cdot 2^3+8\cdot 2^2)=10,$$
$$\frac{1}{24}(3^6+3\cdot 3^4+12\cdot 3^3+8\cdot 3^2)=57,$$
$$\frac{1}{24}(4^6+3\cdot 4^4+12\cdot 4^3+8\cdot 4^2)=240,$$

que fueron los números mencionados en el problema de Sofía.

Problema III.5. ¿Cuántos números, de 1 a 1.990 pueden escribirse como suma de dos o más potencias de 3 distintas?

Solución. Como $3^7=2187$, vemos que no podemos usar potencias de 3 mayores que 3^7. Ahora como la suma de las potencias de 3, desde 3^0 a 3^6, es igual a $\dfrac{3^7-1}{2}<1990$, se sigue que se pueden sumar potencias de 3 hasta 3^6 sin pasarse de 1900. Las potencias 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6 se pueden agrupar de 2^7 formas (cantidad de subconjuntos). En las 2^7 hemos considerado las posibilidades $(0,0,\ldots,0)$, $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $(0,0,\ldots,0,1)$ para los coeficientes de las potencias $3^0,\ldots,3^6$. Como se pregunta por números que pueden escribirse como suma de dos o más potencias, se tienen $2^7-8=120$ números.

Problema III.6. Determine los tres últimos dígitos de $7^{9.999}$.

Solución. Observe que 7^4 =2.401. Luego $7^{4n} = (2.401)^n = (1 + 2400)^n$.. Aplicando el binomio de Newton se obtiene que

$$(1 + 2400)^n = 1 + n \cdot 2400 + \binom{n}{2} 2400^2 + \cdots .$$

De esta última expresión es claro que después del segundo término todos los números terminan en al menos cuatro ceros. Luego los últimos tres dígitos de 7^{4n} están determinados por la expresión $1 + n \cdot 2.400 = 24 \cdot n \cdot 100 + 1$.. Sea m el último dígito de $24 \cdot n$. Entonces $1 + n \cdot 2.400$ terminará en $m01$. Tomemos un n adecuado para formar 9.999. Dividiendo tenemos que $9999 = 9996 + 3 = 4 \cdot 2499 + 3$ Por lo analizado anteriormente se deduce que $7^{9.996} = 7^{4 \cdot 2.499}$ termina en 601. Como 7^3 termina en 343, se obtiene que el número en cuestión debe terminar en 143.

Problema III.7. ¿Cuántos números entre 1 y 6.500 pueden ser escritos como suma de dos o más potencias distintas de 5?

Solución. Se tiene que $5^5 = 3{,}125$ y $5^6 = 15{,}625 > 6{,}500$. Luego los números buscados son de la forma

$$a_0 5^0 + a_1 5^1 + a_2 5^2 + a_3 5^3 + a_4 5^4 + a_5 5^5,$$

donde para $i = 0, 1, \ldots, 5$ los números a_i son 0 ó 1.

Como cada coeficiente a_i puede asumir dos valores, tenemos 2^6 posibilidades. Ahora, como deben ser dos o más potencias distintas de 5, descartamos los casos:

$$a_i = 1 \quad \text{y} \quad a_j = 0 \quad , \quad i \neq j \qquad \text{(6 posibilidades)}$$

y también

$$a_i = 0 \quad , \quad i = 0, 1, \ldots, 5 \qquad \text{(1 posibilidad).}$$

De aquí se obtiene que hay $2^6 - 6 - 1 = 57$ posibilidades.

Problema III.8. Considere a y b dos números reales positivos. Pruebe que para cada número natural n se tiene que

$$\frac{a^n + b^n}{2} > \left(\frac{a + b}{2}\right)^n .$$

Solución. Aplicaremos el binomio de Newton. Tenemos

$$\begin{aligned}
a^n + b^n &= \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right)^n + \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{a-b}{2}\right)^k \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{a-b}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-k} \left(\left(\frac{a-b}{2}\right)^k + (-1)^k \left(\frac{a-b}{2}\right)^k\right) > 0 \\
&= 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^n + \text{ otros términos positivos.}
\end{aligned}$$

Dividiendo por 2 se finaliza la demostración.

Problema III.9. Determine la suma de todos los números distintos que se producen al desordenar los dígitos del número 1234.

Solución. Necesitamos saber cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar con los dígitos $1, 2, 3, 4$. Claramente se trata de un problema de variación sin reposición. Por tanto, la cantidad total de tales números es $4! = 24$. Una manera de encontrar la suma de tales números es hacer la lista de ellos y simplemente sumarlos. Evidentemente esto sería largo de realizar y muy engorroso.

Analizando más cuidadosamente el problema podemos observar que si fijamos el dígito 1 en la primera posición, entonces las tres posiciones restantes pueden ser ocupadas de $3!$ maneras distintas por los dígitos $2, 3, 4$. Lo mismo sucede si fijamos el 1 en la segunda, tercera o cuarta posición. La cantidad de números obtenidos con este método es por lo tanto $3! + 3! + 3! + 3! = 4 \cdot 3! = 4!$. Si fijamos cualquier otro dígito se obtiene la misma conclusión.

Imaginémonos ahora los 24 números uno debajo de otro y sumemos. Para sumarlos se debe empezar con las unidades, enseguida con las decenas y así sucesivamente. Por el análisis ya hecho se tiene que cada dígito aparece exactamente $3!$ veces en la columna de las unidades, en la columna de las decenas, etc. Luego la suma en cada columna es $(1 + 2 + 3 + 4) \cdot 3! = 10 \cdot 3!$.

Por lo tanto, la suma total S de los $4!$ números es

$$\begin{aligned}
S &= 10 \cdot 3! + 10 \cdot 3! \cdot 10 + 10 \cdot 3! \cdot 100 + 10 \cdot 3! \cdot 1000 \\
&= 10 \cdot 3! \cdot (1 + 10 + 100 + 1000) \\
&= 10 \cdot 3! \cdot 1111 = 66660.
\end{aligned}$$

Problema III.10. Probar que, en el problema anterior, si se considera el número 123.456.789 en vez de 1.234, se obtiene $S = 201.599.999.798.400$.

Problema III.11. En una Conferencia internacional se reúnen 15 delegados provenientes de Africa, América, Asia y Europa. Cada continente envía un número diferente de delegados y cada uno está representado, por lo menos, por un delegado. América y Asia envían un total de 6 delegados, Asia y Europa un total de 7 delegados. Un continente envió 4 delegados. Determine tal continente.

Solución. A partir del enunciado del problema, podemos afirmar que:

1. Europa tiene un delegado más que América; por lo tanto, si América tiene n delegados, Europa tiene $n+1$ delegados.
2. La suma de los delegados de Europa, América y Asia, es decir, $2n+1+\text{Asia}$ es igual a $13-\text{Asia}$.
3. El valor de n como mínimo tendrá que ser 1 , y por lo tanto el valor máximo de Asia será 5 , es decir, $1 \leq \text{Asia} \leq 5$.
4. Como los valores mínimos y máximos de Asia son 1 y 5 , repectivamente, los valores mínimos y máximos de Asia más Europa más América son 8 y 12 , es decir, $8 \leq 2n+1+\ \text{Asia} \leq 12$.
5. Como los valores mínimos y máximos de Asia más Europa más América son 8 y 12 , respectivamente, los mínimos y máximos de Africa serán 3 y 7 , respectivamente, es decir, $3 \leq \text{Africa} \leq 7$.

Ahora, buscaremos el continente con 4 delegados.

1. Si ocurre que Africa envió 4 delegados entonces $2n+1+\ \text{Asia}\ = 11 = 13-\text{Asia}$, lo cual nos da que $\text{Asia} = 3$, de donde $2n+1 = 8$, esto es, $2n = 7$, lo cual es una contradicción.
2. Si $\text{América} = 4$ entonces $\text{Europa} = 5$ y $2n+1+\text{Asia} = 13-\text{Asia}$, que implica $2\text{Asia} = 4$, de donde $\text{Asia} = 2$ y $\text{Africa} = 4$, lo cual es una contradicción, pues $\text{América}\ \neq \text{Africa}$.
3. Si $\text{Europa} = 4$ entonces $\text{América} = 3$ y $2n+1+\text{Asia} = 13-\text{Asia}$ lo que implica que $\text{Asia} = 3$, lo que es un contradicción $(\text{América}\ \ \neq \text{Asia})$
4. Si $\text{Asia} = 4$ tenemos $2n+1+4 = 13-4 = 9$, de donde $2n+1 = 5$ y por lo tanto $n = 2$, así obtenemos que $\text{América} = 2$, $\text{Europa} = 3$ y $\text{Africa} = 6$.

En conclusión Asia envió 4 delegados.

Problema III.12. Determinar el número de maneras en que pueden fotografiarse:

i) 6 niños y 7 niñas puestos en hilera pero de manera que nunca aparezcan juntos dos del mismo sexo.
ii) 8 matrimonios en hilera con la condición que cada marido esté al lado de su esposa.

iii) 8 personas en hilera con la condición que 3 de ellas A, B, C queden siempre en el mismo orden relativo.

Solución. (Cristián García Palomer)

i) Usaremos la letra M para representar una mujer, y la letra H para representar un hombre. La única manera de que se cumpla la condición es

$$MHMHMHMHMHMHM\ .$$

Así, la primera niña podrá ser elegida entre 7 niñas, la segunda entre 6, y así sucesivamente. El primer niño podrá ser elegido entre 6, el segundo entre 5, y así sucesivamente. Entonces, por combinatoria (regla del producto) tenemos,

$$7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 7! \cdot 6! = 5040 \cdot 720 = 3{,}628{,}800 \quad \text{maneras}\,.$$

ii) Representemos por $XXXXXXXX = 8$ matrimonios. Con la regla del producto tendremos $8! = 40{,}320$. Multiplicamos 40,320 por 2^8, que representa el hecho de que en cada matrimonio el marido podrá ponerse a la izquierda o a la derecha de su esposa, es decir, tiene dos posibilidades. Así, tenemos

$$40{,}320 \cdot 2^8 = 10{,}321{,}920 \text{ maneras}\,.$$

iii) Las 3 personas ABC pueden combinarse en $3! = 6$ maneras. Si consideramos estas 3 personas como una, entonces tendremos 6 personas alineadas, que podrán combinarse en $6! = 720$ maneras. Así, tenemos

$$720 \cdot 6 = 4{,}320 \text{ maneras}\,.$$

Problema III.13. Dadas dos rectas paralelas del plano y n puntos distintos sobre una y m puntos distintos sobre la otra. ¿Cuántos triángulos quedan determinados con vértices en esos puntos?

Solución. (José Antonio Vaisman)

Llamenos L, L' a las dos rectas paralelas.

Si dos vértices del triángulo se encuentran en L entonces hay

$$m\binom{n}{2} = m\,\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{mn(n-1)}{2}$$

triángulos.

Si dos vértices del triángulo se encuentran en L', entonces hay

$$n\binom{m}{2} = n\,\frac{m!}{2!(m-2)!} = \frac{mn(m-1)}{2}$$

triángulos.

Por lo tanto el número total de triángulos que quedan determinados es

$$\frac{mn(n-1)}{2} + \frac{mn(m-1)}{2}\,.$$

Capítulo IV

ELEMENTOS DE ANÁLISIS

En este capítulo introduciremos los números reales a partir del conocimiento de los números racionales. El tratar de dar un esbozo lo más completo posible de la construcción de los reales nos llevaría a desarrollar una teoría que excedería el objetivo de este libro. Debido a esto nos remitiremos solamente a algunas generalidades.

Esencialmente ejemplificaremos el proceso de aproximación de los números reales por números racionales mediante la representación decimal (y p-ádica) de un número real. Para presentar estas representaciones es necesario el estudio de series y de algunos conceptos básicos de convergencia que se incluyen en este capítulo.

IV.1. Números racionales

Hasta ahora hemos trabajado con los números naturales $\mathbb{N}$ y los números enteros $\mathbb{Z}$. En esta sección daremos una descripción más precisa de lo que entendemos por número racional.

Como ya hemos visto, la ecuación $mx = n$ con m y n números enteros coprimos, no siempre posee una solución en los enteros. Aquí nace la necesidad de construir otro conjunto de números donde tal ecuación siempre tenga solución y que contenga a los números enteros.

Consideremos el conjunto $\mathcal{F}$ de las fracciones de números enteros

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{n}{m} \; : \; n, m \in \mathbb{Z}, \; m \neq 0 \right\}$$

Diremos que una fracción $n/m \in \mathcal{F}$ es irreducible si y sólo si n y m no poseen divisores comunes.

Dadas dos fracciones n_1/m_1 , n_2/m_2 en $\mathcal{F}$, diremos que ellas son equivalentes, $n_1/m_1 \approx n_2/m_2$, si y sólo si $n_1 \cdot m_2 = m_1 \cdot n_2$.

En matemática, para definir sin ambiguedad un número racional se procede de la siguiente manera. Un número racional, que denotaremos por $\dfrac{p}{q}$, donde p, q números enteros con $q \neq 0$, es el conjunto

$$\frac{p}{q} = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathcal{F} \, : \, \frac{n}{m} \approx \frac{p}{q} \right\}. \tag{IV.1}$$

Debido a que $\approx$ es una relación refleja, simétrica y transitiva, se obtiene que

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p}{q} \text{ si y sólo si } \frac{p_1}{q_1} \approx \frac{p}{q}.$$

Es así como podemos definir el número racional $\frac{p}{q}$ como el conjunto (IV.1), y se representa con el símbolo $\frac{p}{q}$ o por cualquier otro elemento del conjunto (IV.1) . Es natural elegir como notación para un número racional $\frac{p}{q}$ aquel elemento del conjunto (IV.1) para el cual p y q no tiene divisores comunes. Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} = \left\{\frac{2}{4}, \frac{-3}{-6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{10}, \dots\right\}, \ -\frac{1}{2} = \left\{\frac{-2}{4}, \frac{2}{-4}, \frac{-3}{6}, \frac{1}{-2}, \frac{-5}{10}, \dots\right\}$$

y por definición de número racional tenemos que

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{5}{10} = \dots, -\frac{1}{2} = \frac{-2}{4} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} = \dots.$$

Por convención se eligirá el signo .$^{\text{en}}$ el numerador como representante del número racional $-\frac{p}{q}$.

El conjunto formado por todos los números racionales se denotará por el símbolo $\mathbb{Q}$.

Notemos que $\mathbb{Z}$ está contenido en $\mathbb{Q}$, puesto que todo número entero n puede ser escrito en forma fraccionaria como $n/1$.

Las operaciones de suma (+) y producto ($\cdot$) de números enteros se extienden de modo natural a los racionales, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad+bc}{bd} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd}. \end{aligned}$$

Para realizar la suma o el producto se toma cualquier fracción representante de los números racionales a ser sumados o multiplicados. Esto define de modo único una fracción, y consideramos como resultado al número racional que esta fracción representa. Notemos que resulta que las operaciones de suma y producto son operaciones cerradas en $\mathbb{Q}$; es decir, la suma de dos números racionales es un número racional y análogamente para el producto.

Ahora la ecuación $mx = n$, con $m \neq 0$, tiene como solución al número racional n/m .

IV.1.1. Orden en los números racionales. En $\mathbb{Z}$ tenemos un orden, a saber, $a < b$ significa que $b - a > 0$. En forma natural podemos definir un orden en $\mathbb{Q}$ a partir del orden en $\mathbb{Z}$ mediante la siguiente definición.

Diremos que un número racional $p = \frac{a}{b}$ es *positivo* si se satisface una de las siguientes propiedades para los números enteros a, b.

i) a, b son ambos positivos, es decir, si $a > 0$ y $b > 0$.
ii) $-a, -b$ son ambos positivos, es decir, si $-a > 0$ y $-b > 0$.

Dados dos números racionales p y q, decimos que p *es menor que* q y lo denotamos por $p < q$, si $(q - p)$ es positivo. Por otra parte decimos que $p \leq q$, si $p < q$ ó $p = q$.

Al calcular $q - p$ con $p = a/b$ y $q = c/d$ se tiene la conocida propiedad

$$p < q \quad \text{si y sólo si} \quad ad < bc\,.$$

El siguiente resultado asegura que cualquier par de números racionales siempre son comparables.

Lema IV.1. *Dados dos números racionales p y q, una y solamente una de las propiedades siguientes se cumple: $p < q$ o $p = q$ o $q < p$.*

El resultado básico de esta relación "$<$ ", llamada relación de orden, es el siguiente:

Todo cuadrado de un número racional no nulo es positivo

Es decir, si p es un número racional diferente de cero, entonces $p^2 > 0$. A continuación enumeramos algunas propiedades que son necesarias para operar algebraicamente con esta relación.

Propiedades de las desigualdades.

i) Si $p \leq q$ y $r \in \mathbb{Q}$ entonces $(p + r) \leq (q + r)$.
ii) Si $p \leq q$ y $r \leq s$ entonces $(p + r) \leq (q + s)$.
iii) Si $p \leq q$ y $r > 0$ entonces $p \cdot r \leq q \cdot r$.
iv) Si $0 < p \leq q$ entonces $1/q \leq 1/p$.
v) Si $p \leq q$ y $r < 0$ entonces $p \cdot r \geq q \cdot r$.

Observación: $a \geq b$ significa que b es menor o igual que a, y se lee a es mayor o igual que b.

A partir de la noción de orden en $\mathbb{Q}$ definimos el *valor absoluto* de un número racional q, y que denotamos por $|q|$, como $|q| = máx\{q, -q\}$, el máximo entre q y $-q$. Notemos que si $q \geq 0$ entonces $máx\{q, -q\} = q$. Por otra parte, si $q < 0$ entonces $máx\{q, -q\} = -q$ pues siendo $q < 0$ se tiene que $-q > 0$. Por esta razón $|q|$ queda expresado como

$$|q| = \begin{cases} q & \text{si } q \geq 0; \\ -q & \text{si } q < 0. \end{cases}$$

Es claro que $|q| = 0$ si y sólo si $q = 0$. Además por definición $|q| \geq 0$ y $|q| = |-q|$ para todo q racional.

Propiedades del valor absoluto.

Dados los números racionales q y r se tiene que

i) si $r \geq 0$, entonces $|q| \leq r$ si y sólo si $-r \leq q \leq r$;

ii) $|q \cdot r| = |q| \cdot |r|$;
iii) $-|q| \leq q \leq |q|$;
iv) $|q + r| \leq |q| + |r|$, *desigualdad triangular.*

Las demostraciones de estas propiedades son consecuencia directa de la definición de valor absoluto.

IV.2. Números reales

En esta sección introduciremos otro conjunto de números, llamado conjunto de los números reales. Para "justificar"la necesidad de construir los *números reales*, examinemos la siguiente ecuación cuadrática

$$x^2 = 2\,.$$

Esta simple ecuación no posee soluciones en los números enteros y, más aún, tampoco tiene soluciones en los números racionales. La demostración de esta aseveración no es difícil de obtener y la damos a continuación.

Supongamos que exista una solución racional; es decir, sean p, q números enteros coprimos tales que $(p/q)^2 = 2$. Aplicando las reglas conocidas de la operatoria en $\mathbb{Q}$ se obtiene que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \text{si y sólo si} \quad p^2 = 2q^2.$$

Es decir $2|p^2$, y luego, como 2 es primo, él debe dividir a p . Esto quiere decir que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p = 2n$. Entonces $2q^2 = 4n^2$ o equivalentemente $q^2 = 2n^2$. Mediante un razonamiento similar al ya aplicado para p se obtiene que q también debe ser divisible por 2. Entonces 2 es un divisor común de p y q, lo cual contradice la coprimalidad de ellos.

Notemos que la solución de la ecuación se realiza geométricamente (por el Teorema de Pitágoras) como la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado uno.

Denotemos por $1,414$ el número racional $p_1 = 1414/1000$ y por $q_1 = 1,415$ el número racional $1415/1000$.

Puesto que la siguiente desigualdad

$$(1,414)^2 < 2 < (1,415)^2$$

es válida se deduce que la solución positiva z de la ecuación $z^2 = 2$ debe satisfacer que $1,414 < z < 1,415$. Observemos que la diferencia entre estas primeras aproximaciones racionales p_1 y q_1 de z es

$$1,415 - 1,414 = 0,001 = \frac{1}{1000}.$$

Es decir, al aproximar z por $1,414$ o por $1,415$ se comete un error de a lo más de un milésimo.

Como segunda aproximación de z podemos tomar los números racionales $p_2 = 1,4142$ y $q_2 = 1,4143$. En este caso el error cometido es a lo más $\frac{1}{10{,}000}$.

Así sucesivamente podemos continuar tomando aproximaciones racionales p_n y q_n para z de tal manera que

$$p_n < z < q_n,$$

con p_n creciendo sin nunca sobrepasar a z, y con q_n decreciendo, y tal que las diferencias $q_n - p_n$ se van haciendo cada vez más pequeñas.

Esta idea de elegir p_n y q_n cada vez más cercanos entre sí a medida que n crece, y por lo tanto cada vez más cercanos al valor z, no es otra que la noción intuitiva de límite de una sucesión.

Diremos que una sucesión de $\{p_n\}_n$ de números racionales es *de Cauchy* si sus diferencias $p_n - p_m,\ n \neq m$, están tan cerca de 0 como se desee a partir número natural M en adelante. Matemáticamente, esto se expresa como sigue.

Definición 1. *Sea $\{p_n\}_n$ una sucesión de números racionales. Decimos que ella satisface la condición de Cauchy, si dado $\varepsilon > 0$, arbitrario, existe $M \in \mathbb{N}$ (dependiendo de ε) tal que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ con $m, n > M$ se tiene que $|p_n - p_m| < \varepsilon$.*

El número ε considerado en la definición está en $\mathbb{Q}$. Es fácil ver que la sucesiónes $\{p_n\}_n$ y $\{q_n\}_n$ construidas para el objeto no racional z son sucesiones de Cauchy.

Por lo tanto existen elementos no racionales que aparecen asociados a estas aproximaciones mediante números racionales.

Definición 2. *Al conjunto de los elementos que se obtienen por aproximación (sucesiones de Cauchy) de números racionales se le llama el conjunto de los números reales.*

Esto es lo que exactamente ocurre con la solución z de la ecuación $x^2 = 2$, para el cual tenemos aproximaciones por una sucesión de Cauchy de números racionales.

Claramente $\mathbb{Q}$ está contenido en $\mathbb{R}$, puesto que cualquier número racional q es aproximable por la sucesión de números racionales $\{q_n\}_n$ dada por $q_n = q$ para todo n.

Hay otra forma de introducir los números reales, llamado el método de las Cortaduras. Volviendo al ejemplo de la ecuación $x^2 = 2$, consideremos A el subconjunto no vacío de $\mathbb{Q}$ definido por

$$A = \{p \in \mathbb{Q} \,:\, p^2 < 2\,,\, p > 0\}.$$

Afirmamos que A no contiene un mayor elemento; es decir, no existe un elemento $t \in A$ tal que $p \leq t$ para todo elemento $p \in A$. Tomemos un elemento $p \in A$ cualquiera. Mostraremos que se puede construir un número racional mayor que p que pertenece al conjunto A.

Como $p \in A$, se tiene que p es racional y satisface que $p > 0$ y que $p^2 < 2$. Elijamos un número racional h tal que $0 < h < 1$ y

$$h < \frac{2 - p^2}{2p + 1}\ ,\ \text{ es decir }\ ,\ (2p + 1)h < 2 - p^2.$$

Consideremos el número racional $s = p + h$. Claramente $s > p$, y además se tiene que

$$s^2 = (p + h)^2 = p^2 + (2p + h)h < p^2 + (2p + 1)h < p^2 + (2 - p^2) = 2,$$

lo que prueba que $s \in A$.

En resumen, a pesar del hecho que dado dos números racionales arbitarios p, q siempre hay un tercer número racional distinto de los anteriores que se encuentre entre ellos, a saber el número racional $\frac{p+q}{2}$, hemos mostrado de nuevo que el sistema de los números racionales tiene ciertas lagunas. Desde este punto de vista algebraico, un número real se define como sigue

Definición 3. *Un número real α es un conjunto de números racionales que satisface las propiedades siguientes:*

I) *Si x es un elemento de α e y es un número racional con $y < x$, entonces y también está en α.*
II) *α es no vacío y $\alpha \neq \mathbb{Q}$.*
III) *No existe ningún elemento máximo en α; dicho de otro modo, si $x \in \alpha$, entonces existe algún $y \in \alpha$ con $y > x$.*

El conjunto de todos los números reales se denota por el símbolo $\mathbb{R}$. A los elementos de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ se les llama números irracionales.

Por ejemplo hemos probado que el conjunto A definido con anterioridad es un número irracional, el cual se denota por el símbolo $\sqrt{2}$.

Estas dos construcciones de los números reales son equivalentes; es decir, ellas producen el mismo conjunto. Las operaciones de suma y producto definidas en $\mathbb{Q}$ se extienden naturalmente a $\mathbb{R}$.

Por ejemplo consideremos $a \in \mathbb{Q}$ con $a > 0$ y $n \geq 2$ un natural. Definamos el subconjunto A_n no vacío de $\mathbb{Q}$

$$A_n = \{p \in \mathbb{Q} : p^n < a, p > 0\}.$$

Este conjunto es una cortadura y representa un número real que se denota por $\sqrt[n]{a}$, llamado la raíz n-ésima de a. La propiedad III se demuestra en forma similar al caso $\sqrt{2}$. Es decir, si $p \in A_n$ se elige h con $0 < h < 1$ y que satisfaga

$$h < \frac{a - p^n}{(1+p) - p^n}.$$

Aplicando el Teorema del Binomio se tiene que

$$(p+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} h^k = p^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} h^k.$$

Además $h^k < h$ para todo $k \geq 1$ (puesto que $h < 1$). Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}(p+h)^n &= p^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} h^k \leq p^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} \\ &= p^n + h[(1+p)^n - p^n] < p^n + a - p^n = a.\end{aligned}$$

Lo cual termina la demostración de la propiedad III para A_n.

La noción de orden también se extiende a $\mathbb{R}$, lo que hace que el conjunto de los números reales sea un Cuerpo ordenado. Además este conjunto $\mathbb{R}$ ya no posee las lagunas que tenía $\mathbb{Q}$; en matemática a esta propiedad se le denomina completitud.

La formalización matemática de este hecho nos lleva al concepto de *convergencia* de una sucesión de números reales, el cual damos a continuación.

Definición 4. *Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de números reales. Decimos que ella converge o tiene límite el número real L cuando n tiende a infinito, lo cual denotamos por*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L\,,$$

si para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $M \in \mathbb{N}$ (que depende de ε) tal que para todo $n \geq M$ se tiene que

$$|x_n - L| < \varepsilon\,,$$

Es decir, dado $\varepsilon > 0$, es posible encontrar $M \in \mathbb{N}$ tal que para los números naturales n mayores o iguales que M, el valor x_n esta próximo de L con un error menor que ε. Nótese que no interesa lo que ocurra con los valores x_n cuando $n < M$.

La idea de que no hay lagunas o huecos en $\mathbb{R}$ se formaliza matemáticamente mediante el siguiente resultado, quizás uno de los resultados más importante del análisis.

Teorema IV.1. **(Completitud de $\mathbb{R}$)**

Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de números reales. Entonces $\{x_n\}_n$ es de Cauchy si y sólo si $\{x_n\}_n$ es convergente.

Es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente y su límite es un número real. Aunque la definición de sucesión de Cauchy sólo contempla números racionales, ella, en forma natural, se generaliza para una sucesión de números reales. Ahora mostraremos algunas desigualdades y límites que nos serán de utilidad en las secciones siguientes.

Proposición IV.1. *Dados números reales positivos a y b, se tiene que:*

$$(a+b)^2 \geq 4ab\ , \quad \text{o, equivalentemente}\ , \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

En otras palabras, la media geométrica $\sqrt{ab}$ de a y b, es menor o igual que su media aritmética, $(a+b)/2$.

Para probar esta desigualdad, basta observar que dado $c \in \mathbb{R}$, entonces su cuadrado, c^2, es mayor o igual que cero. Usando esto, tenemos que

$$(b-a)^2 \geq 0\ , \text{ de donde } a^2 - 2ab + b^2 \geq 0\ ,$$

y de ahí $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Sumando $2ab$ a ambos lados de esta desigualdad, tenemos $a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$; es decir, $(a+b)^2 \geq 4ab$ y por lo tanto $2\sqrt{ab} \leq a+b$.

Proposición IV.2. *Desigualdad de Bernoulli.*

Para cada número real $x > -1$, y cada número natural n, se tiene que,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\ .$$

Apliquemos el principio de inducción. Claramente la desigualdad es válida para $n = 1$. Supongamos que es cierta para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Entonces

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2\end{aligned}$$

y como $nx^2 \geq 0$, se tiene que $1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$, luego

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

Por lo tanto la desigualdad es válida para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio: Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n$, n números reales positivos. Pruebe (usando inducción) que:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

es decir, la media geométrica de n números reales positivos es menor o igual que la media aritmética de ellos.

En los siguiente ejemplos usaremos el concepto *parte entera* de un número real, el cual a continuación definimos.

Definición 5. *La parte entera, $[x]$, de un número real x es el menor número entero menor o igual que x. La parte fraccionaria, $((x))$, de x es $((x)) = x - [x]$.*

Observemos que $0 \leq ((x)) = x - [x] < 1$, y que $x - [x] = 0$ si y sólo si x es entero. Además, para cualquier número real x se tiene que $x = [x] + ((x))$. Por ejemplo,

$$\left[\frac{943}{414}\right] = 2\,, \quad \left(\left(\frac{943}{414}\right)\right) = \frac{115}{414}\,.$$

Ejemplo IV.1. $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Consideremos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces $1/n < \varepsilon$ si y sólo si $n > 1/\varepsilon$. Por el Teorema 1.2 existe $n_0 \in \mathbb{N}$, primer número natural mayor o igual a $[1/\varepsilon] + 1$. Luego

$$n_0 > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Probaremos que este $n_0 \in \mathbb{N}$ encontrado tiene la propiedad pedida. Si $n \geq n_0$ entonces por la desigualdad anterior se tiene la siguiente cadena de desigualdades

$$n \geq n_0 > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

y despejando n se obtiene que $1/n < \varepsilon$.

Ejemplo IV.2. *Consideremos q un número real con $0 < |q| < 1$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1-q}.$$

Examinemos la expresión

$$\frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1}{1-q} = \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Supongamos que $0 < q < 1$ y sea $\alpha = 1/q > 1$. Entonces $\alpha = 1+x$ con $x > 0$. Aplicando la desigualdad de Bernoulli (Proposición 3.2) se obtiene que $\alpha^{n+1} = (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. Por lo tanto, aplicando las propiedades de las desigualdades se obtiene que

$$0 < \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{\alpha^{n+1}} \leq \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1+(n+1)x} \leq \frac{1}{x(1-q)} \cdot \frac{1}{n}.$$

Por el ejemplo anterior se sabe que $\frac{1}{n}$ tiende a cero cuando n crece a infinito, y puesto que x, q son números fijos, independientes de n, se obtiene lo pedido. El caso $-1 < q < 0$ se trabaja en forma análoga.

Decimos que una sucesión de números reales $\{x_n\}_n$ es **acotada superiormente** (respectivamente, **inferiormente**) cuando existe una constante $c > 0$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente, $x_n \geq c$) para todo natural n.

Diremos que que la sucesión $\{x_n\}_n$ es **creciente (decreciente)** si para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$). El siguiente resultado es muy útil para demostrar la existencia de límite para sucesiones y la usaremos más adelante.

PROPOSICIÓN IV.3. *Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de números reales. Si la sucesión es creciente (decreciente) y acotada superiormente (inferiormente), entonces es convergente.*

Notemos que una sucesión de números reales puede ser acotada superiormente y no ser acotada inferiormente o viceversa o no ser acotada ni superior ni inferiormente.

Ejemplo IV.3. *Sea $a > 1$, entonces la sucesión $\{a^n\}_n$ es acotada inferiormente pero no superiormente.*

Notemos que si $1 < a$, entonces $a^n < a^{n+1}$, para todo natural n. Luego $a < a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual muestra que la sucesión es acotada inferiormente. Por otra parte como $a > 1$, se puede escribir de la forma $a = 1 + d$, $d > 0$. Aplicando la desigualdad de Bernoulli se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a^n = (1+d)^n \geq 1 + nd$. Por lo tanto dado cualquier $c \in \mathbb{R}$, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \geq 1 + nd > c$. Luego dado $c > 0$ cualquiera podemos elegir $n > c - 1/d$ tal que el correspondiente valor $a^n > c$, y por ende la sucesión no es acotada superiormente.

IV.2.1. Serie geométrica. Para estudiar la aproximaciones racionales de un número real usaremos el desarrollo en expansión decimal de un número real. Para ello introduciremos el concepto de *serie*, el cual revisaremos ahora en forma breve.

Consideremos una sucesión $\{a_i\}_i$ de números reales. A partir de ella podemos formar otra sucesión $\{s_n\}_n$, llamada *sucesión de sumas parciales* o *serie numérica* de término general a_i, de la siguiente manera $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots$. En otras palabras, el término general s_n es de la forma

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i .$$

El símbolo $\sum_{i\geq M} a_i$ representa la serie de término a_i que comienza a partir de M donde M es un número natural fijo.

Definición 6. *Decimos que una serie $\sum_{i\geq 0} a_n$ tiene suma un número real L, y usamos la notación $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = L$, si y sólo si $\lim_{n\to\infty} s_n = L$.*

En otras palabras, el símbolo $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ representa un número real L si

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = L, \text{ si y sólo si } \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_n = L.$$

Apliquemos esta definición para el caso de la serie geométrica.

Ejemplo IV.4. **Serie geométrica** *Consideremos la serie $\sum_{i\geq 0} a \cdot q^i$, donde $a \neq 0$ y $q \neq 1$. Del Capítulo II sabemos cómo calcular la suma de la progresión geométrica*

$$s_n = a + a \cdot q^1 + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^n = \sum_{i=0}^{n} a \cdot q^i = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

luego por definición,

$$\sum_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

y este último límite existe si y sólo si $|q| < 1$, como se demostró en el Ejemplo 2. Luego si $|q| < 1$ se tiene que

$$\sum_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i = a \cdot \frac{1}{1-q}\,. \tag{IV.2}$$

Si $|q| > 1$ la suma anterior no existe. El número q se llama la razón de la serie goemétrica.

Observemos que la fórmula (IV.2) es también aplicable a sumas que comienzan en números M mayores que cero puesto que en tal caso se tiene la siguiente igualdad

$$\sum_{i=M}^{\infty} a \cdot q^i = \sum_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i - \sum_{i=0}^{M-1} a \cdot q^i\ .$$

Por ejemplo, se tiene que

$$\sum_{i=2}^{\infty} 6 \cdot 10^{-i} = 6 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} - \left(1 + \frac{1}{10}\right) = \frac{10}{9} - \frac{11}{10}\,.$$

Ejemplo IV.5. *Consideremos la serie $\sum_{k\geq 0} 1/k!$.*

Para mostrar la convergencia de ella, basta probar que las sumas parciales $s_n = 1+1+1/2!+1/3!+\ldots+1/n!$ con $n \geq 3$ producen una sucesión creciente y acotada superiormente (ver Proposición III.1). Claramente $s_{n+1} \geq s_n$.

Del Ejemplo II.1 del capítulo II, se tiene que $n! > 2^n > 2^{n-1}$. Entonces, usando el Ejemplo,

$$s_n \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \ .$$

se obtiene que es acotada superiormente por 3. Esto prueba que esta serie es convergente; al número real que converge se le denota por e. Es decir,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \ .$$

Este número real resulta ser irracional; es decir, no existen un par de números enteros a, b tales que $e = a/b$.

IV.3. Aproximaciones decimales

IV.3.1. Representación decimal. En esta sección construiremos un algoritmo para lograr aproximar números reales por números racionales. Estudiaremos la representación decimal de un número real.

Consideremos el conjunto $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, el cual llamaremos conjunto de dígitos.

Comencemos con un número natural n. Se quiere expresar n como una suma de potencias de 10 y coeficientes (dígitos) en D, esto es; queremos escribir

$$n = k_0 + k_1 10 + k_2 10^2 + \ldots + k_n 10^N = \sum_{i=0}^{N} k_i \cdot 10^i \tag{IV.3}$$

donde los coeficientes k_i, $i = 0, 1, \cdots, N$ son elementos de D. En el argumento que a continuación explicamos aplicaremos reiteradas veces el algoritmo de la división, y no mencionaremos en forma explícita cada vez que lo utilizemos.

Primero, si $0 \leq n \leq 9$ entonces $n = k_0 \cdot 10^0$ y luego basta con tomar $k_0 = n$. Ahora, si $10 \leq n < 10^2$ podemos escribir $n = k_1 \cdot 10^1 + r_1$ donde $k_1 \in D$ y $0 \leq r_1 < 10$. Por lo tanto r_1 puede ser escrito como $r_1 = k_0 \cdot 10^0$, con $k_0 = r_1$, y luego

$$n = k_1 \cdot 10^1 + k_0 \cdot 10^0, \ \text{con} \quad k_0, k_1 \in D.$$

Si $10^2 \leq n < 10^3$ tenemos que $n = k_2 \cdot 10^2 + r_2$, $k_2 \in D$ y $0 \leq r_2 < 10^2$. Si $0 \leq r_2 < 10$ entonces $r_2 = k_0 \cdot 10^0$ donde $k_0 = r_2$ y tomando $k_1 = 0$ podemos escribir

$$n = k_0 \cdot 10^0 + k_1 10^1 + k_2 10^2, \ \text{con} \quad k_0, k_1, k_2 \in D.$$

Por otra parte, si $10 \leq r_2 < 10^2$ se tiene que $r_2 = k_1 \cdot 10^1 + r_1$, donde $k_1 \in D$ y $0 \leq r_1 < 10$, luego tomando $k_0 = r_1$ obtenemos que $n = \sum_{i=0}^{3} k_i \cdot 10^i$, $k_1, k_2, k_3 \in D$.

Además, para todo número natural n existe ℓ de modo que $10^\ell \le n < 10^{\ell+1}$. Aplicando el método descrito se obtiene que n se puede escribir en la forma dada en (3.3). En resumen, hemos probado que cada número natural n se puede expresar como una suma de potencias de 10 y coeficientes (dígitos) en D. Esta representación es llamada **representación decimal (o en base 10) de** n .

El mismo tipo de representación mediante una suma finita para un número real x con $0 \le x < 1$ ya no es posible como se muestra en el siguiente ejemplo.

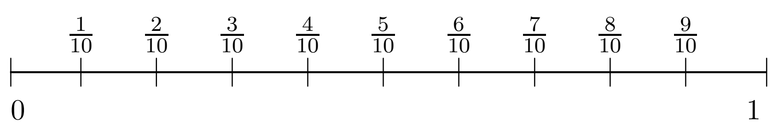
Ejemplo IV.6. *Consideremos el número racional* $2/3$.

$$\frac{2}{3} = 0,666666\ldots = 0,6 + 0,06 + 0,006\ldots \tag{IV.4}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} 6 \cdot 10^{-j} = 6 \sum_{j=1}^{\infty} \cdot 10^{-j}\,. \tag{IV.5}$$

Por lo tanto debemos estudiar la convergencia de la serie infinita $\sum_{j=1}^{\infty} 6 \cdot 10^{-j}$. En este ejemplo esto es inmediato puesto que ella es una serie geométrica de razón $1/10$ y su suma es $2/3$.

A continuación construiremos una representación decimal para los números reales x con $0 \le x < 1$. Denotaremos a este conjunto por el símbolo $[0,1[$ y geométricamente lo representaremos por el segmento de recta,



En otras palabras,a cada punto del segmento corresponde un elemento de $[0,1[$. Resumiendo, dado $x \in [0,1[$, queremos representarlo como

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot 10^{-i} \tag{IV.6}$$

donde $k_i \in D$ para cada $i \ge 1$. Para obtenerla dividamos el intervalo $[0,1[$ en diez partes iguales, como se muestra en la figura anterior.

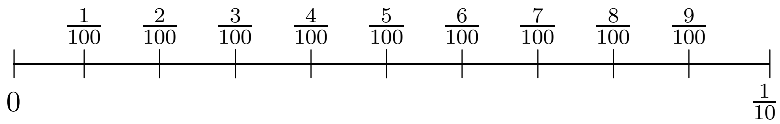
Sea k_1 el mayor elemento en D tal que $k_1/10 \le x < (k_1+1)/10$. Entonces tenemos que:

$$x = \frac{k_1}{10} + r_1,$$

donde $0 \le r_1 < 1/10$. Si $r_1 = 0$ detenemos el proceso y tomando $k_i = 0$ para cada $i \ge 2$ se obtiene que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot 10^{-i}\,.$$

Por otra parte, si $0 < r_1 < 1/10$ dividimos el intervalo $[0, 1/10[$ en 10 partes iguales.



Denotemos por k_2 el mayor elemento en D para el cual
$$\frac{k_2}{10^2} \leq r_2 < \frac{k_2+1}{10^2}.$$
Si $r_2 = k_2/10^2$ paramos el proceso y tomando $k_i = 0$ para $i \geq 3$, tenemos que
$$x = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot 10^{-i}.$$
Ahora si $k_2/10^2 < r_2 < (k_2+1)/10^2$ aplicamos lo anterior a r_2, y escribimos $r_2 = k_2/10^2 + r_3$, donde $0 \leq r_3 < 1/10^2$.

Ahora repetimos el proceso con r_3 y así sucesivamente. De este modo obtenemos que x puede escribirse como
$$x = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot 10^{-i},$$
donde los coeficientes $k_i \in D$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Como en el Ejemplo 6, el problema se reduce a examinar si la serie del lado derecho de esta última igualdad es convergente.

Para mostrar esto notemos primero que $k_i/10^i \leq 9/10^i$ para cada $i \geq 1$. Sea $x_n = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot 10^{-i}$ una suma parcial de la serie $\sum_{i\geq 1} k_i \cdot 10^{-i}$ y sea G_n la correspondiente suma parcial de la serie geométrica $\sum_{i\geq 1} 9 \cdot 10^{-i}$. Aplicando la fórmula (3.2) y puesto que los coeficientes de la serie geométrica son positivos se obtiene que
$$x_n \leq G_n \leq \sum_{i=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-i} = 1,$$
lo cual muestra que la sucesión $\{x_n\}_n$ es acotada superiormente por 1.

Además la sucesión de sumas parciales $\{x_n\}_n$ es creciente, pues cada vez estamos sumando términos no negativos (mayores o iguales que cero). Aplicando la Proposición 1.1 se concluye que $\{x_n\}_n$ es convergente; esto es, la serie $\sum_{i\geq 1} k_i \cdot 10^{-i}$ es convergente y su suma $x = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot 10^{-i}$ es un número real en el intervalo $[0, 1]$.

Teorema IV.2. *Dado un número real x con $0 \leq x \leq 1$ y un número $\varepsilon > 0$, entonces existe un número racional q tal que $|x - q| < \varepsilon$.*

Consideremos el desarrollo decimal de x, esto es, escribamos $x = \sum_{i=0}^{\infty} k_i \cdot 10^{-i}$. Definamos para cada número natural n el número
$$x_n = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot 10^{-i}.$$

Es claro que que cada x_n es un número racional (pues es una suma finita de números racionales). Además $|x - x_n|$ satisface que

$$|x - x_n| = \sum_{i=n+1}^{\infty} k_i \cdot 10^{-i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-i} = 10^{-n},$$

de donde se deduce que $|x - x_n|$ se aproxima a cero cuando n crece indefinidamente; o, más precisamente, eligiendo n_0 de tal manera que $1/10^{n_0} < \varepsilon$ y definiendo $q = x_{n_0} = \sum_{i=1}^{n_0} k_i \cdot 10^{-i}$ se obtiene lo pedido.

Es decir, dado un número real x en el intervalos $[0, 1]$ hemos construido una sucesión de números racionales que aproxima a x.

Para terminar veremos que si tenemos un número real $x \geq 1$ también podemos construir estas aproximaciones mediante números racionales. Para ello, reduciremos el problema al caso $0 \leq x < 1$.

Para tal efecto escribamos $x = [x] + ((x))$ donde x es un número real con $x \geq 1$. Como $[x]$ es un número natural él se puede representar de la forma

$$[x] = \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot 10^i,$$

donde $a_i \in D$ y N es el menor natural tal que $10^N \leq [x] < 10^{N+1}$. Por otra parte como $0 \leq ((x)) < 1$ sabemos que

$$((x)) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot 10^{-i},$$

donde $k_j \in D$ para cada $j \geq 1$. En resumen, x se puede representar como

$$x = \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot 10^i + \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot 10^{-j}. \tag{IV.7}$$

La primera suma es la representación decimal del número natural $[x]$ y la segunda suma (que es una serie) es la representación decimal de la parte fraccionaria $((x))$ de x. Ahora, para cada número natural n definamos

$$x_n = [x] + \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot 10^{-i}.$$

Cada x_n es un número racional, y en forma análoga al caso anterior se demuestra que x_n se aproxima cada vez más a x cuando n crece indefinidamente.

Esta propiedad de los números racionales en los números reales es llamada la *densidad de los racionales en los reales*.

Por ejemplo, $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ se puede escribir en la forma

$$\sqrt{2} = 1 \cdot 10^0 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \ldots.$$

De este modo, utilizando la representación (IV.7), podemos escribir cada número real positivo en su forma decimal y obtener de este modo aproximaciones de él por números racionales.

En general la representación decimal de un número no es única, por ejemplo 1 puede escribirse como

$$1 = 0 \cdot 10^0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{9}{10^j} = 1 \cdot 10^0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{0}{10^j}.$$

Cuando el denominador de la fracción irreducible p/q no es una potencia de 10, la representación decimal de él es periódica. Por otra parte, la pérdida de unicidad en la representación decimal de un número real x ocurre cuando x es de la forma p/q con q una potencia de 10. Observemos también que un número irracional tiene representación decimal no periódica.

IV.3.2. Representación en base $p > 1$. En la sección anterior estudiamos la representación decimal (base 10) de los números reales no negativos. Ahora trataremos de imitar tal construcción tomando como base un número natural $p > 1$ en vez de la base 10 considerada en la sección anterior.

Como en el caso anterior, comenzamos por definir nuestro conjunto de dígitos $D = \{0, 1, 2, \ldots p-1\}$. Primero buscamos la representación en base p para los número naturales. Es decir, dado un número natural n, queremos representarlo como una suma (finita) de potencias de p y coeficientes en el conjunto D; esto es, expresar n como

$$n = \sum_{i=0}^{N} k_i \cdot p^i = k_0 + k_1 p + \ldots + k_N p^N, \tag{IV.8}$$

donde para $i = 0, 1, \ldots, N$ los coeficientes k_i son elementos de D. Para lograrlo procedemos en forma similar al caso de la representación decimal, aplicando el algoritmo de división con p en vez de 10.

Imitando lo realizado para $p = 10$, bastará lograr dicha representación para los números reales x en el intervalo $[0, 1[$. Para esto, dividamos los intervalos $[0, 1/p^n]$ $(n \geq 0)$ en p partes iguales. Siguiendo las mismas directrices que se utilizaron para el caso $p = 10$, se obtiene la representación requerida; es decir, se concluye que x posee la representación

$$x = \sum_{j=0}^{N} a_j \cdot p^j + \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot p^{-i}\,.$$

La convergencia de la serie del lado derecho de la igualdad anterior está garantizada debido a que se le compara con la serie geométrica de razón $1/p$ $(p > 1)$.

Ejemplo IV.7. **Representación triádica.**

Esta representación consiste en tomar $p = 3$ y por lo tanto el conjunto de dígitos $D = \{0, 1, 2\}$. Entonces todo número real positivo x es representable como

$$x = \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot 3^i + \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot 3^{-j} \tag{IV.9}$$

donde los coeficientes a_l y $k_l \in D$ para todo l.

Por ejemplo,

$$\frac{38}{81} = 1 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + 0 \cdot 3^{-4} + \ldots + 0 \cdot 3^{-n} + \ldots.$$

Observemos que en este caso los coeficientes son $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 2$ y $k_j = 0$ para $j \geq 4$.

Otros ejemplos de representaciones triádicas son

$$\begin{aligned} 15 &= 0 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 \\ \frac{7}{9} &= 2 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} \\ \sqrt{2} &= 1 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^{-1} + 0 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + \cdots \quad \text{(no periódica)} \\ \frac{2}{9} &= 0 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} = 1 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + \ldots + 2 \cdot 3^{-k} + \ldots \end{aligned}$$

Calculemos en detalle el siguiente ejemplo.

$$\frac{7}{8} = 2 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + 1 \cdot 3^{-4} + 2 \cdot 3^{-5} + \ldots$$

donde los coeficientes de subíndice impar son iguales a 2 y los con subindice par son iguales a 1. Para probar esta última igualdad procedemos a partir la serie en dos series, una que agrupa los coeficientes pares y otra los impares. Aplicando la fórmula (3.2) se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} 2 \cdot 3^{-(2j+1)} + \sum_{j=0}^{\infty} 1 \cdot 3^{-2j} &= \frac{2}{3} \sum_{j=0}^{\infty} 9^{-j} + \sum_{j=1}^{\infty} 9^{-j} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

En general, un número real x tiene una representación finita en base 3, es decir, de la forma

$$x = \sum_{i=0}^{N} k_i \cdot 3^i + \sum_{j=1}^{M} k_j \cdot 3^{-j},$$

si y sólo si x es de la forma $m/3^n$, donde n y m son enteros positivos.

Notemos que si el denominador de la fracción irreducible p/q no es una potencia de 3 entonces la representación en base 3 de p/q es periódica. Por otra parte números irracionales poseen representaciones no periódicas en base 3.

Ejemplo IV.8.

$$\frac{1}{4} = 0 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + \ldots$$

aquí los coeficientes con índice impar son ceros y los coeficientes con índice par son iguales a 2.

Ejemplo IV.9.

$$\frac{1}{7} = 0 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + 1 \cdot 3^{-5} + 2 \cdot 3^{-6} + 0 \cdot 3^{-7} + \dots$$

El bloque formado por los coeficientes $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 0$, $k_4 = 2$, $k_5 = 1$, $k_6 = 2$ *y* $k_7 = 0$ *en la expresión anterior se repite periódicamente.*

Al igual que en el caso en base 10, cada número real tiene una representación en la forma (3.7) y existen números para los cuales se tiene al menos dos representaciones distintas, por ejemplo

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \cdots = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots$$

Ejemplo IV.10. **Representación Binaria.**

Esta representación consiste en tomar $p = 2$ *y* $D = \{0, 1\}$*. Entonces todo número real positivo* x *es representable como*

$$x = \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot 2^i + \sum_{j=1}^{\infty} k_j \cdot 2^{-j} \tag{IV.10}$$

donde los coeficientes a_l *y* $k_l \in D$ *para todo* l*.*

Por ejemplo,

$$\frac{137}{256} = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 0 \cdot 2^{-6} + 0 \cdot 2^{-7} + 1 \cdot 2^{-8}.$$

Es decir, si consideramos los símbolos 001 y 01011 ellos representan los respectivos números racionales

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} &= 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} \\ \frac{19}{32} &= 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5}. \end{aligned}$$

Un número irracional debe tener infinitos unos y ceros en su expresión binaria (de otra forma representaría un número racional), y estos ceros y unos no tienen ninguna periodicidad. Es así como los símbolos 01001000100001 . . . , 110111011110111110 . . . representan número reales. El lector puede tratar de calcularlos.

Para las computadoras, calculadoras y relojes digitales los números son objetos de diferentes longitudes compuestos por ceros y unos. En particular, como la longitud de los símbolos que estas máquinas pueden calcular es finito (dependiendo de la capacidad de cada una), concluimos que ellas trabajan solamente con números racionales. Para máquinas que procesan con 8 y 13 dígitos respectivamente, los resultados que generan para el número irracional $\sqrt{2}$ son $1,4142135$ y $1,414213562373$ respectivamente. Obviamente, por lo que ya sabemos, estos valores son sólo aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$, y no el valor real.

En las representaciones de números reales expuestas en estas notas hemos supuesto que tanto la base p ($p > 1$) y los dígitos D utilizados son números naturales, la verdad es que esto sólo sirvió para simplificar la exposición y los cálculos. En general, podemos contruir representaciónes de los números reales usando una base cualesquiera p con $|p| > 1$ y un conjunto finito de dígitos $D = \{d_1, d_2, \cdots, d_k\}$. La condición $|p| > 1$ es necesaria para garantizar la convergencia de las series geométricas que aparecen en tal caso.

IV.4. Problemas resueltos

Problema IV.1. Se sabe que el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{array}{rcl}(y^2+6)(x-1) & = & y(x^2+1) \\ (x^2+6)(y-1) & = & x(y^2+1)\end{array}$$

tiene un número finito de soluciones reales. Pruebe que el número de soluciones es par.

Solución. Observemos que el sistema es simétrico en x e y; es decir, si tenemos un par (a, b) que es solución del sistema entonces el par (b, a) también lo es. Luego cada solución (a, b) del sistema nos generará la solución (b, a), la cual es distinta de la primera cuando $a \neq b$, por lo que tenemos un número par de soluciones en este caso.

Resta probar que existe un número par de soluciones (a, b) con $a = b$. Supongamos entonces $x = y$ en el sistema: se tiene que $(x^2+6)(x-1) = x(x^2+1) = x^3 - x^2 + 6x - 6 = x^3 + x$. Simplificando queda la ecuación cuadrática $x^2 - 5x + 6 = 0$, o equivalentemente, $(x-2)(x-3) = 0$, cuya soluciones son $x = 2$ y $x = 3$. Así los pares $(2, 2)$ y $(3, 3)$ son las soluciones del sistema en este caso.

Entonces el sistema tiene un número par de soluciones.

Problema IV.2. Considere b un número entero mayor que 1. Pruebe que el número

$$k = \frac{1}{b} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{b^9} + \frac{1}{b^{16}} + \frac{1}{b^{25}} + \cdots + \frac{1}{b^{n^2}} + \cdots$$

es irracional.

Solución. (Arturo Prat W.) Primero damos un Lema, cuya prueba es sencilla, el cual nos será útil en nuestra solución.

Lema *Si un número es irracional en una base lo será en cualquier otra base.*

Ahora escribamos el número k en la base b. En cualquier sistema de numeración la base se representa como 10. Luego,

$$\begin{array}{rcl}k & = & \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10000} + \dfrac{1}{1000000000} + \dfrac{1}{10000000000000000} + \cdots \\ & = & 0,1001000010000001000000001\ldots\end{array}$$

es evidente que mientras más decimales consideremos la distancia entre dos unos consecutivos será mayor (habrá más ceros) por lo tanto el número no tiene período y tiene infinitos decimales. Luego es irracional, esto se cumple para cualquier base de numeración $b \in \mathbb{N}$ con $b > 1$.

Problema IV.3. Considere a, b, c números positivos. Demuestre que

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

Solución. Tenemos que $(a + b - c)^2 \geq 0$ y desarrollando el cuadrado se obtiene que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2bc + 2ac - 2ab$. Dividiendo por el número positivo abc se obtiene la desigualdad pedida.

Problema IV.4. Considere los siguientes números racionales

$$\frac{1995^{1994}+1}{1995^{1995}+1}, \qquad \frac{1995^{1995}+1}{1995^{1996}+1}.$$

Determine cuál de ellos es el mayor.

Solución. Restando el segundo número del primero nos queda

$$\frac{(1995^{1994}+1)(1995^{1996}+1) - (1995^{1995}+1)^2}{(1995^{1995}+1)(1995^{1996}+1)}.$$

Como el denominador es positivo, analizamos si el numerador es positivo o negativo. El numerador es

$$1995^{3990}+1995^{1994}+1995^{1996}+1-1995^{3990}-2\cdot 1995^{1995}-1 = 1995^{1994}(1+1995^2)-1995^{1994}\cdot 3990.$$

Ahora, como $1 + 1995^2 > 3990$ la resta es positiva, luego

$$\frac{1995^{1994}+1}{1995^{1995}+1} \qquad > \qquad \frac{1995^{1995}+1}{1995^{1996}+1}.$$

Problema IV.5. Pruebe que para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\text{máx}(x,y) = \frac{x+y+|y-x|}{2}, \quad \text{y} \quad \text{mín}(x,y) = \frac{x+y-|y-x|}{2}.$$

Solución. (Mario Ponce.) Tenemos

1.- Si $x > y$ entonces $\text{máx}(x,y) = \dfrac{x+y+x-y}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$, y $\text{mín}(x,y) = \dfrac{x+y-x+y}{2} = \dfrac{2y}{2} = y$.

2.- Si $y > x$ entonces $\text{máx}(x,y) = \dfrac{x+y+y-x}{2} = \dfrac{2y}{2} = y$, y $\text{mín}(x,y) = \dfrac{x+y-y+x}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$.

3.- Finalmente, si $x = y$ entonces $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|y-x|}{2} = \dfrac{2x}{2} = \dfrac{2y}{2} = y = x$,
y $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|y-x|}{2} = \dfrac{2x}{2} = \dfrac{2y}{2} = x = y$.

Problema IV.6. Si $xyz = 1$, calcule el valor de la expresión

$$E = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz}.$$

Solución. Como $xyz = 1$ resulta que $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Así , las fracciones pueden ser amplificadas por z la primera y por xz la segunda :

$$E = \frac{z}{z+xz+xyz} + \frac{xz}{xz+xyz+xyz^2} + \frac{1}{1+z+xz}$$
$$= \frac{z}{z+xz+1} + \frac{xz}{xz+1+z} + \frac{1}{1+z+xz} = \frac{1+z+xz}{1+z+xz} = 1$$

Problema IV.7. Se tiene una calculadora estropeada que ahora sólo puede sumar, restar y obtener el inverso (multiplicativo) de un número. Demuestre que usando esta calculadora se puede calcular el producto de dos números.

Solución. Si x, y son dos números, entonces su producto se puede expresar como

$$xy = \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2}.$$

Luego basta probar que con esta calculadora se puede obtener el cuadrado de cualquier número. Si t es un número, se puede calcular sucesivamente: $t-1$, $\frac{1}{t-1}$; $t+1$, $\frac{1}{t+1}$; $\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} = \frac{2}{t^2-1}$; $\frac{t^2-1}{2}$; t^2-1 y luego se obtiene t^2 sumando uno.

Problema IV.8. Un coleccionista desea tener estampillas de 10, 40 y 120 pesos. Con 1.000 pesos compra exactamente 40 estampillas. ¿Cuántas estampillas adquirió de cada clase?

Solución. Llamemos x, y, z la cantidad de estampillas de 10 , 40 y 120 pesos respectivamente. Usando la información del problema obtenemos que x, y, z deben cumplir que

$$\begin{aligned} 10x + 40y + 120z &= 1000 \\ x + y + z &= 40 \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 10 y restándola a la primera se obtiene la relación siguiente

$$30y + 110z = 600 \Leftrightarrow 3y + 11z = 60\,.$$

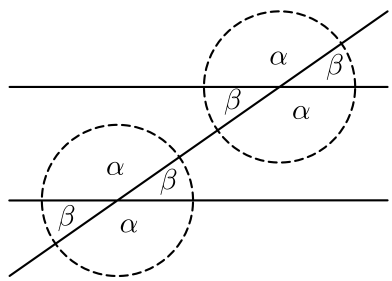
Mediante inspección directa las únicas soluciones enteras positivas son $y = 9$,$z = 3$. Usando la segunda ecuación se deduce que $x = 28$.

Capítulo V

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

V.1. Algunos conceptos básicos

1. Una recta transversal a dos rectas paralelas determina ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes del mismo lado iguales.



2. Acerca de triángulos y ángulos.
   - La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.
   - En un triángulo a mayor ángulo se opone mayor lado.
   - Un triángulo se dice *acutángulo* si sus tres ángulos son menores que 90^o. En un triángulo acutángulo la suma de los cuadrados de dos lados es mayor que el cuadrado del tercer lado.
   - Un *triángulo obtuso* es un triángulo que tiene un ángulo mayor que 90^o. En un triángulo obtuso la suma de los cuadrados de los dos lados menores es menor que el cuadrado del lado mayor.
   - Un triángulo se dice *isósceles* si tiene dos lados iguales. En un triángulo isósceles los ángulos basales son iguales.

3. *Desigualdad triangular*. En un triángulo la suma de las longitudes de dos lados es siempre mayor que la longitud del tercer lado .

4. Dos triángulos son *congruentes* si:
   - Tienen respectivamente iguales los lados correspondientes.
   - Tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido por ellos.
   - Tienen respectivamente iguales dos ángulos y el lado comprendido correspondiente.

- Tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de estos lados.

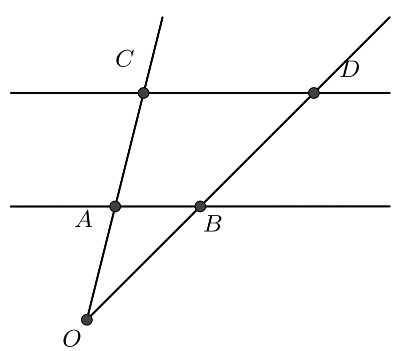
5. Dos triángulos son *semejantes* si:
   - Tienen respectivamente iguales dos ángulos.
   - Tienen respectivamente dos lados proporcionales y el ángulo comprendido por ellos igual.
   - Tienen respectivamente iguales dos ángulos y el lado comprendido correspondiente.
   - Tienen respectivamente sus tres lados proporcionales
   - Tienen respectivamente los tres lados paralelos.
   - En triángulos semejantes, a los lados que se corresponden se les llaman lados homólogos.

6. Un cuadrilátero es un *paralelógramo* si:
   - Tiene sus lados opuestos paralelos.
   - Tiene los lados opuestos iguales.
   - Tiene sus ángulos opuestos iguales.
   - Tiene un par de lados paralelos e iguales.
   - Un par de lados opuestos son iguales y un par de ángulos opuestos son iguales.
   - Un par de lados opuestos son paralelos y un par de ángulos opuestos son iguales.
   - Sus diagonales se dimidian.

7. Un *cuadrilátero cíclico* es aquel cuyos cuatro vértices se encuentran en una misma circunferencia. Una condición necesaria y suficiente para que sea cíclico es que sus ángulos opuestos sumen 180°.

V.2. Algunos teoremas clásicos

(T1) Si trazamos rectas paralelas sobre los lados de un ángulo se determinan triángulos semejantes. En el dibujo tenemos $\triangle OAB$ semejante con $\triangle OCD$.



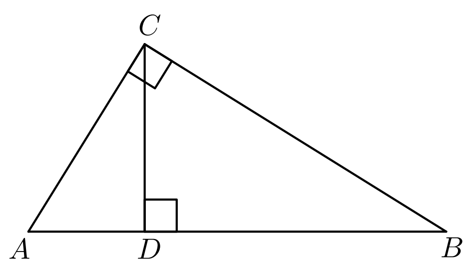
(T2) Si una recta L divide dos lados de un triángulo en segmentos respectivamente proporcionales, entonces la recta es paralela al tercer lado.

(T3) Fórmula de Herón.
El área de un triángulo de lados a, b, c es igual a: $\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$, donde $2S = a + b + c$.

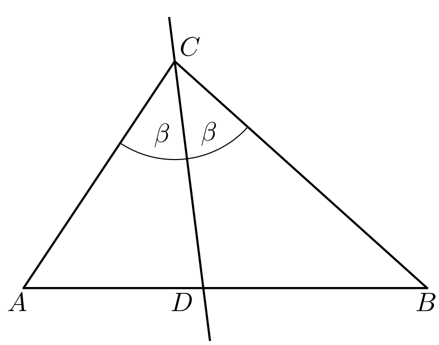
(T4) Teorema de Pitágoras. Un triángulo es rectángulo si y sólo si la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Si a y b son los catetos y c la hipotenusa entonces $a^2 + b^2 = c^2$.

(T5) Un triángulo equilátero es un triángulo cuyos lados son iguales. En un triángulo equilátero
(a) las alturas coinciden con las bisectrices y con las transversales;
(b) de lado b su altura es igual a $\dfrac{b}{2}\sqrt{3}$.

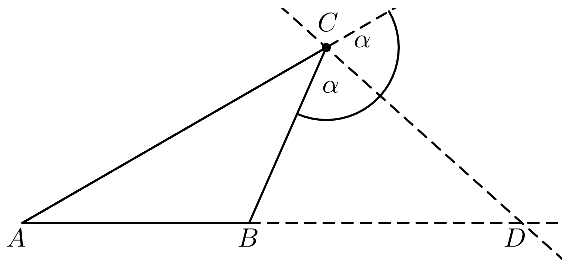
(T6) La altura bajada desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa en un triángulo rectángulo, divide al triángulo en dos triángulos semejantes y también semejantes al triángulo original. $\triangle ABC$ es semejante con $\triangle ACD$ y es semejante con $\triangle CDB$.



(T7) En un triángulo la bisectriz de un ángulo interior divide al lado opuesto en dos segmento proporcionales a los otros dos lados del triángulo, $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$.



(T8) En un triángulo la bisectriz exterior de un ángulo divide al lado opuesto (la prolongación) en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados, es decir, $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$.

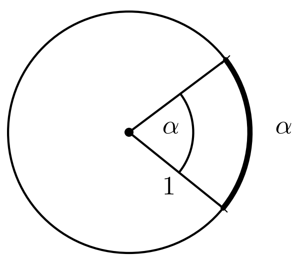


El *rombo* es un paralelógramo cuyos cuatro lados son de igual longitud y no tiene ningún ángulo recto. Un paralelógramo

(a) es un rombo si y sólo si una diagonal es también bisectriz, o bien si sus diagonales son perpendiculares.
(b) es un rectángulo si tiene un ángulo recto, o bien si sus diagonales son iguales.

V.3. Circunferencia, círculo y sus segmentos importantes

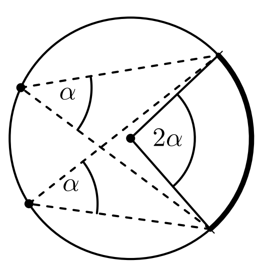
En una circunferencia la medida de un ángulo del centro es la medida del arco subtendido por dicho ángulo (en radianes y con radio 1).



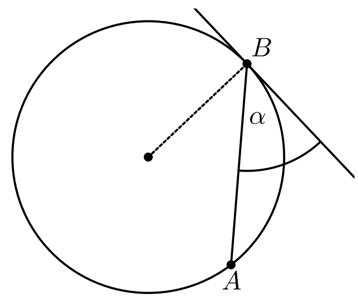
Algunos resultados relevantes

(C1) Un ángulo del centro de α radianes determina un sector circular de área $\dfrac{\alpha}{2}r^2$.

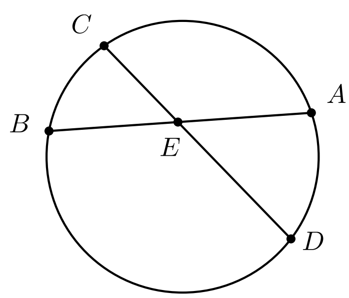
(C2) La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo del centro correspondiente.



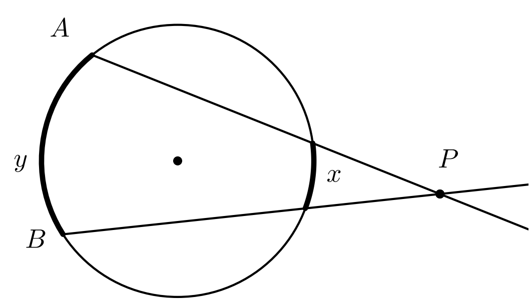
(C3) Un ángulo semi-inscrito tiene su vértice sobre una circunferencia, y está formado por una secante y una tangente a la circunferencia; y su medida es la mitad de la medida del arco que intersecta, $\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$. Es decir, la medida de un ángulo semi-inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.



(C4) Dos cuerdas que se cortan dentro de un círculo determinan un ángulo de medida la mitad de la suma de los arcos subtendidos, $\angle AED = \frac{\widehat{BC}+\widehat{AD}}{2}$, y el producto de la medida de los segmentos determinados en una de las cuerdas es igual al producto de la medida de los segmentos determinados en la otra cuerda, es decir, $CE \cdot ED = BE \cdot EA$.

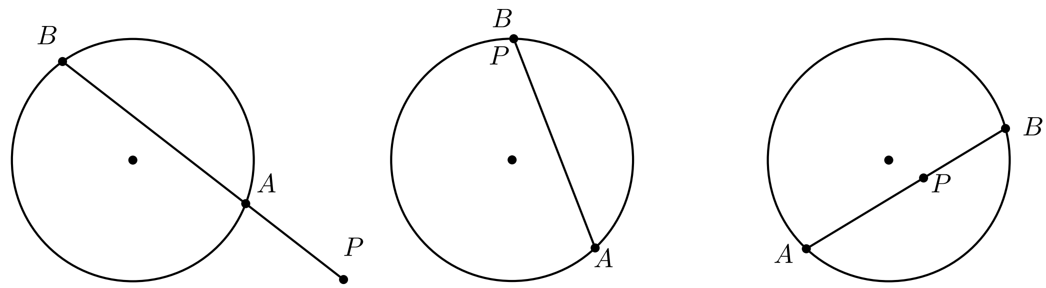


(C5) La medida del ángulo que forman dos cuerdas que se cortan fuera del círculo (sus prolongaciones) es igual a la medida de la mitad de la diferencia de los arcos que



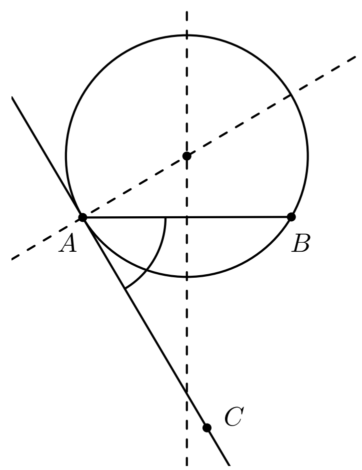
subtienden, $\measuredangle APB = \dfrac{y-x}{2}$.

(C6) Si desde un punto P se traza una secante a una circunferencia intersectándola en los puntos A y B, entonces tenemos que el producto $PA \cdot PB$, llamado *la potencia de P*, es constante (no depende de donde corte la secante a la circunferencia), y la potencia del punto P es positiva, cero o negativa, dependiendo de si el punto P está fuera, sobre, o dentro de la circunferencia.



(C7) El *arco capaz* es el lugar geométrico de todos los puntos desde los que un segmento AB se ve con el mismo ángulo; es decir, el lugar geométrico de todos los vértices de los ángulos que tienen la misma amplitud y abarcan un mismo segmento.

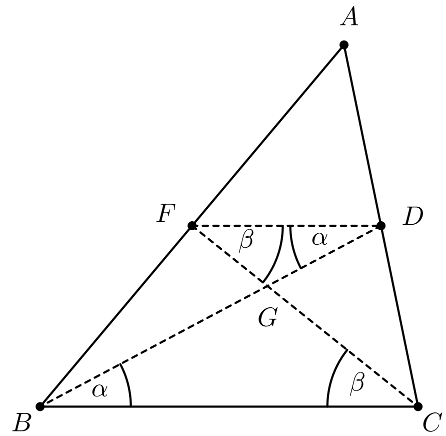
Construcción del arco capaz. Dado un segmento AB y un ángulo $\alpha = \measuredangle CAB$, el arco del círculo desde el que se ve el segmento AB bajo un ángulo α se construye tomando como centro la intersección de la simetral del segmento AB con la perpendicular en A al otro lado del ángulo α, como se muestra en el dibujo.



V.4. La transversal de gravedad y el centro de gravedad o baricentro

El segmento de recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto se llama *transversal de gravedad*.

Teorema V.1. *Las tres transversales de gravedad en un triángulo se intersectan en un mismo punto (es decir, son concurrentes) y este punto divide a las transversales de gravedad en la razón* $2:1$ *a partir de los vértices.*



Demostración. Sean CF y BD dos transversales de gravedad del triángulo $\triangle ABC$. Llamemos G al punto de intersección de estas dos transversales de gravedad. Por el teorema de Tales se tiene que el segmento FD es paralelo al lado BC; de aqui se sigue que $\angle GFD = \angle GCB = \beta$, ya que son ángulos alternos internos. Análogamente $\angle GDF = \angle GBC = \alpha$, y tenemos que el triángulo $\triangle GDF$ es semejante al triángulo $\triangle GBC$ con una razón de semejanza igual a $\frac{1}{2}$ debido a que $FD = \frac{1}{2}BC$.

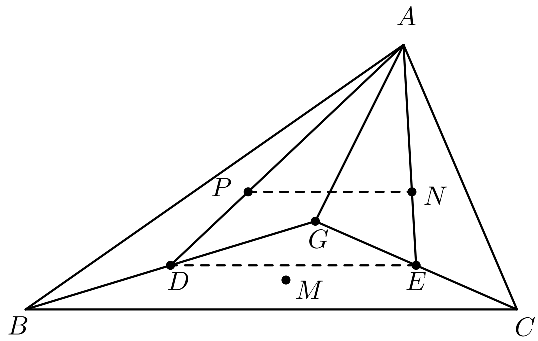
Con esto tenemos que $FG = \frac{1}{2}GC$ y $DG = \frac{1}{2}GB$, y por lo tanto las transversales CF y BD se cortan en el punto G en la razón $2:1$. Análogamente se llega a que la transversal que no consideramos se intersecta con cualquiera de las dos transversales de gravedad anteriores en un punto tal que quedan divididas en la razón $2:1$, por lo que ese punto de intersección necesariamente debe ser G. De aquí concluimos que las tres transversales se intersectan en un punto, al que llamamos *centroide* (baricentro, centro de gravedad del triángulo), y este punto divide en la razón $2:1$ a partir de los vértices a cada una de las transversales de gravedad.

Otra demostración de la concurrencia de las transversales de gravedad se logra aplicando el teorema de Ceva que veremos más adelante, pero desarrollamos la demostración ahora por lo sencilla e inmediata que resulta.

Sean D, E, F los puntos medios de los lados AC , BC y AB respectivamente, de un triángulo $\triangle ABC$, entonces se tiene que $AD = DC$; $BE = EC$; $BF = FA$, de donde se obtiene inmediatamente que $\dfrac{AD}{DC} \cdot \dfrac{BE}{EC} \cdot \dfrac{BF}{FA} = 1$, que es la condición del teorema de Ceva para que las transversales concurran.

Ejemplo V.1. Sea G el centroide de un triángulo $\triangle ABC$, y sean M, N y P los centroides de los triángulos $\triangle BGC, \triangle CGA$ y $\triangle AGB$, respectivamente. Demuestre que el triángulo $\triangle MNP$ es semejante al triángulo $\triangle ABC$.

Solución. Llamemos D y E los puntos medios de BG y CG, respectivamente. Tenemos que DE es paralelo a BC. Además, como $AP : PD = AN : NE = 2 : 1$, entonces PN es paralelo a DE y consecuentemente a BC.



Análogamente, PM es paralelo a AC y MN es paralelo a AB. Como tenemos que $\triangle MNP$ y $\triangle ABC$ tienen sus lados paralelos, entonces son semejantes.

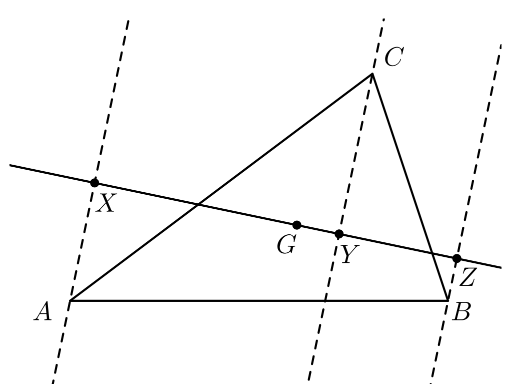
Problemas propuestos

Problema V.1. Todo triángulo es dividido por sus tres transversales en seis triángulos de igual área.

Problema V.2. Pruebe que las paralelas a dos lados de un triángulo, trazadas por el baricentro, dividen al tercer lado en tres segmentos de igual medida.

Problema V.3. Demuestre que la longitud de la transversal trazada hacia la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

Problema V.4. En un triángulo $\triangle ABC$ se dibuja una línea que pasa por el centroide G de éste. Se dibujan perpendiculares desde cada uno de los vértices del triángulo hacia esa línea, las cuales la intersectan en los puntos que se muestran en la figura siguiente. Demuestre que $CY = AX + BZ$.

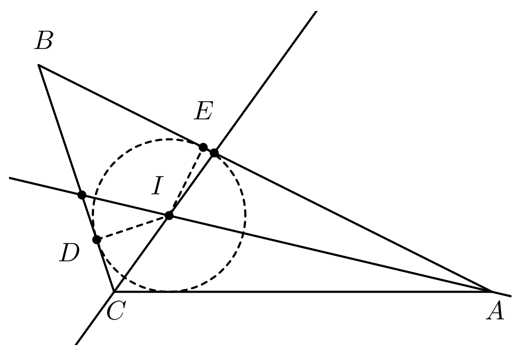


Problema V.5. En un cuadrilátero convexo definiremos una transversal como la línea que une un vértice con el centroide del triángulo formado por los tres vértices restantes. Demuestre que las cuatro transversales en un cuadrilátero se intersectan en un punto y que además se dividen por éste en la razón 3 : 1.

V.5. Las bisectrices y el incentro

La recta que divide un ángulo en dos ángulos iguales se llama *bisectriz*, y se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados que forman dicho ángulo. Esto quiere decir que si tomamos un punto cualquiera sobre la bisectriz de un ángulo, este punto estará a la misma distancia de las dos rectas que forman dicho ángulo.

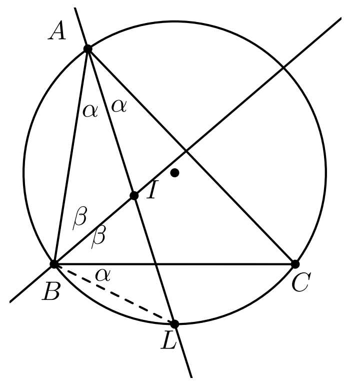
Teorema V.2. *Las bisectrices de los ángulos internos de un triángulo se intersectan en un punto, (incentro) el cual es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.*



Demostración. Sean D y E los puntos donde las bisectrices de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle BCA$ cortan a los lados BC y AB, y sea I el punto de intersección de los segmentos AD y CE. Como AD bisecta al $\angle BAC$ entonces I equidista de los lados AB y AC; además como I también pertenece al segmento CE, el cual bisecta al $\angle BCA$, entonces I equidista de los lados BC y AC. Como I equidista de los lados AB y BC entonces la bisectriz del $\angle ABC$ también pasa por el punto I, por lo que las tres bisectrices concurren en este punto. Este punto de intersección es llamado *incentro*, ya que podemos trazar una circunferencia que sea tangente a los tres lados del triángulo y que tenga como centro al punto I.

Ejemplo V.2. En un triángulo $\triangle ABC$ sea I el incentro. Demuestre que el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle BIC$ está sobre la línea AI.

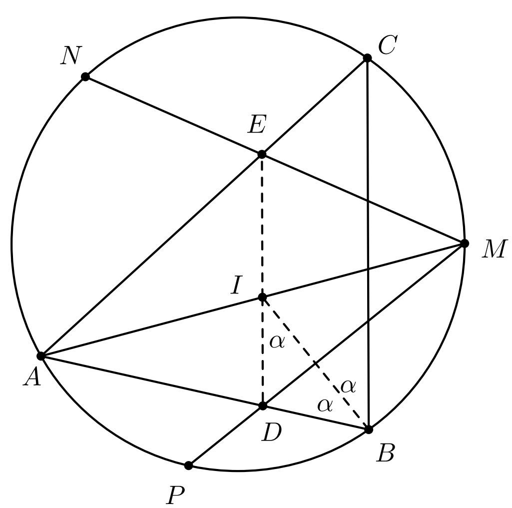
Solución. Sea L el punto donde la bisectriz del $\angle A$ intersecta al circunclrculo. L es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle BIC$. Para probarlo, basta demostrar que $LB = LI = LC$. Tenemos que $LB = LC$, por ser cuerdas de arcos iguales. Por otro lado, tenemos que $\angle BIL = \angle BAI + \angle ABI = \alpha + \beta$, además tenemos que $\angle CBL = \angle CAL = \alpha$ y con esto llegamos a que $\angle IBL = \alpha + \beta$. Hemos demostrado entonces que el triángulo $\triangle BIL$ es isósceles y con esto tenemos que $LB = LI = LC$.



El próximo resultado es muy útil a la hora de resolver problemas acerca de las bisectrices y el incentro de un triángulo.

Ejemplo V.3. Consideremos M, N, y P los puntos medios de los arcos BC, CA y AB, respectivamente, de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$. MP y MN intersectan en D y E a los lados AB y AC. Demuestre que DE es paralela a BC y que pasa por el incentro del triángulo $\triangle ABC$.

Solución. Sea I el incentro del triángulo. Usando el resultado del ejemplo anterior, tenemos que $PB = PI$ y $MB = MI$. Con esto tenemos que MP es la mediatriz de BI, lo que implica que $BD = DI$ y $\angle DBI = \angle DIB = \angle IBC$; es decir, DI es paralela a BC. Análogamente, se demuestra que EI es paralela a BC. Por lo tanto, DE es paralela a BC y pasa por el incentro del triángulo $\triangle ABC$.



Problemas propuestos

Problema V.6. Sea I el incentro de un triángulo $\triangle ABC$. Sea $\angle BAC = \alpha$. Pruebe que

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Problema V.7. Demuestre que la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo es a su vez bisectriz del ángulo formado por la transversal y la altura bajada sobre la hipotenusa.

Problema V.8. Dada una circunferencia y un punto A fuera de ella, llamemos AB y AC las tangentes a la circunferencia (B y C son los puntos de tangencia). Demuestre que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo $\triangle ABC$ está en la circunferencia dada.

V.6. Las alturas de un triángulo y el ortocentro

Recordemos que una *altura* de un triángulo es el segmento perpendicular que une un vértice con el lado opuesto (o su prolongación). Todo triángulo tiene tres alturas las cuales cumplen con el siguiente resultado clásico:

Teorema V.3. *Las tres alturas de un triángulo se intersectan en un punto, que llamamos ortocentro.*

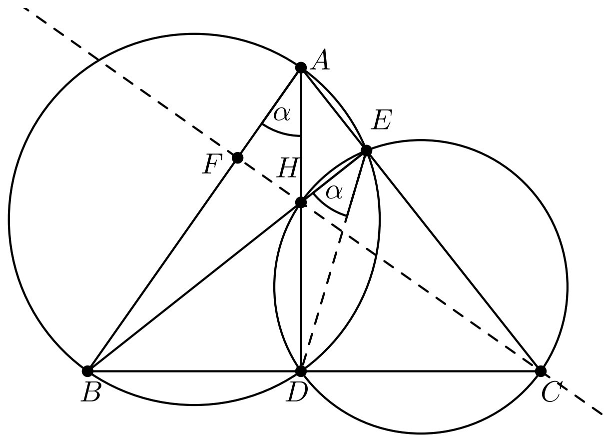
Para la demostración necesitamos el siguiente resultado. Un *cuadrilátero es cíclico* si

- un lado del cuadrilátero subtiende ángulos iguales en los vértices opuestos.
- un par de ángulos opuestos son suplementarios (suman 180^0).

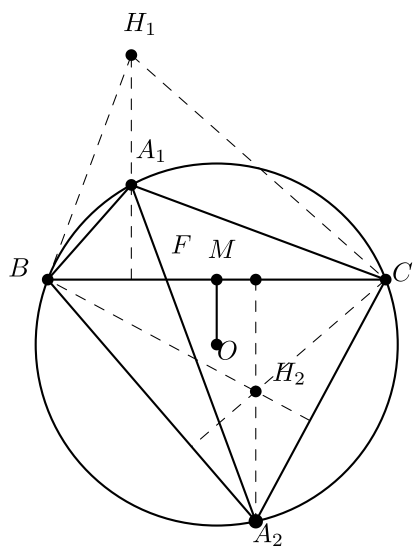
Demostración. En el triángulo $\triangle ABC$ sean D y E los pies de las alturas bajadas desde los vértices A y B sobre los lados BC y AC, respectivamente, y sea H el punto de intersección de AD yBE.

Se traza la línea CH, la cual intersecta al lado AB en el punto F. Para demostrar que CF es una altura, bastará con demostrar que el cuadrilátero $AFDC$ es cíclico, porque así de esta manera el $\angle AFC$ sería igual al $\angle ADC = 90^\circ$.

Como $\angle HDC = 90^\circ = \angle HEC$ entonces el cuadrilátero $HDCE$ es cíclico, por lo que $\angle HED = \angle HCD = \alpha$. Por otro lado, el cuadrilátero $BDEA$ también es cíclico ya que $\angle BDA = 90^\circ = \angle BEA$, por lo que $\angle BAD = \angle BED = \alpha$. Además $\angle BAD = \angle FCB = \alpha$, de donde se concluye que el cuadrilátero $AFDC$ es cíclico y por lo tanto CF es una altura del triángulo $\triangle ABC$. El punto H es llamado *ortocentro* del triángulo.



Ejemplo V.4. Dos triángulos $\triangle A_1BC$ y $\triangle A_2BC$ están inscritos en un círculo y tienen el lado BC en común. Sean H_1 y H_2 los ortocentros de los triángulos $\triangle A_1BC$ y $\triangle A_2BC$, respectivamente. Demuestre que el segmento H_1H_2 es igual y paralelo al segmento A_1A_2.



Solución. Sean O el centro de la circunferencia y M el punto medio de BC. Sabemos que la distancia de un vértice al ortocentro es el doble de la distancia del centro de la circunferencia hacia el lado opuesto a ese vértice. Con esto tenemos que $H_1A_1 = 2 \cdot OM$ y $H_2A_2 = 2 \cdot OM$, lo que implica que $H_1A_1 = H_2A_2$ y además son paralelas, por lo tanto $H_1A_1A_2H_2$ es un paralelogramo.

Problemas propuestos

Problema V.9. Demuestre que en un triángulo los puntos simétricos al ortocentro, con respecto a los lados, están en la circunferencia circunscrita.

Problema V.10. Dos circunferencias de centros O_1 y O_2 se intersectan en los puntos A y B. Demuestre que AB es perpendicular a O_1O_2.

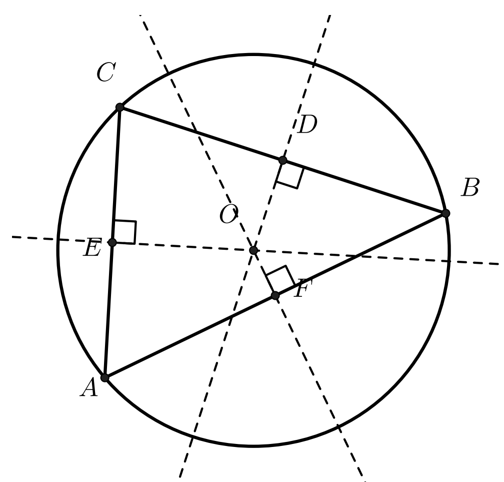
Problema V.11. Sea AD la altura del triángulo $\triangle ABC$ y H el ortocentro. Demuestre que $BD \cdot DC = AD \cdot DH$.

V.7. El circuncentro y las mediatrices

La línea perpendicular a un segmento por su punto medio se llama *mediatriz* del segmento, y se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Teorema V.4. *Las mediatrices de los tres lados de un triángulo se intersectan en un punto (circuncentro), el cuál es el centro de la circuferencia circunscrita a dicho triángulo.*

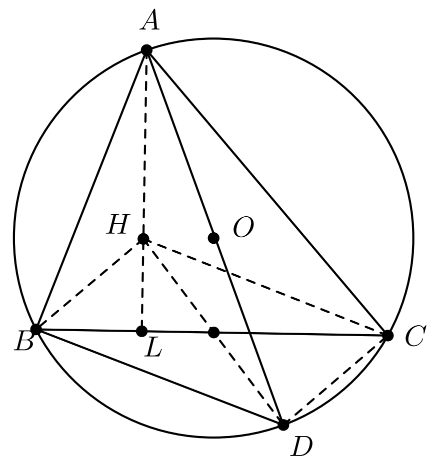
Demostración. Sea $\triangle ABC$ el triángulo y D, E, F los puntos medios de los lados BC, CA, y AB, respectivamente. Trazamos las mediatrices de los lados AB y AC, se intersectan en el punto O. Tenemos que $AO = BO$, por definición de mediatriz; de la misma manera $AO = CO$. Como $BO = CO$ entonces DO es mediatriz del lado BC, por lo que las tres mediatrices se intersectan en un punto llamado *circuncentro*, el cual es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



Ejemplo V.5. En un triángulo $\triangle ABC$ sean H el ortocentro y O el circuncentro. Sea D el punto donde la línea AO intersecta al circuncírculo. Demuestra que HD bisecta el lado BC.

Solución. Tenemos que $\angle ADC = \angle ABC$ y $\angle ACD = 90°$, entonces $\beta = \angle CAD = 90° - \angle ADC = 90° - \angle ABC = \angle HCB$, y como $\angle CBD = \angle CAD = \beta$, tenemos que

HC es paralela a BD. Por otro lado, $\alpha = \angle BCD = \angle BAD = \angle BAC - \beta$. Además como $\angle BAL = 90^\circ - \angle ABC = \beta$, tenemos que $\angle HBC = \angle LAC = \angle BAC - \beta = \alpha$, y entonces HB es paralela a CD. Así $HBDC$ es un paralelógramo, y por lo tanto sus diagonales se bisectan.



Problemas propuestos

Problema V.12. En un triángulo equilátero $\triangle ABC$, el punto K divide el lado AC en la razón $2:1$ y el punto M divide al lado AB en la razón $1:2$. Demuestre que la longitud del segmento KM es igual al radio de la circunferencia circunscrita en el triángulo $\triangle ABC$.

V.8. Circunferencias exinscritas

Todo triángulo tiene cuatro circunferencias que son tangentes a sus tres lados:

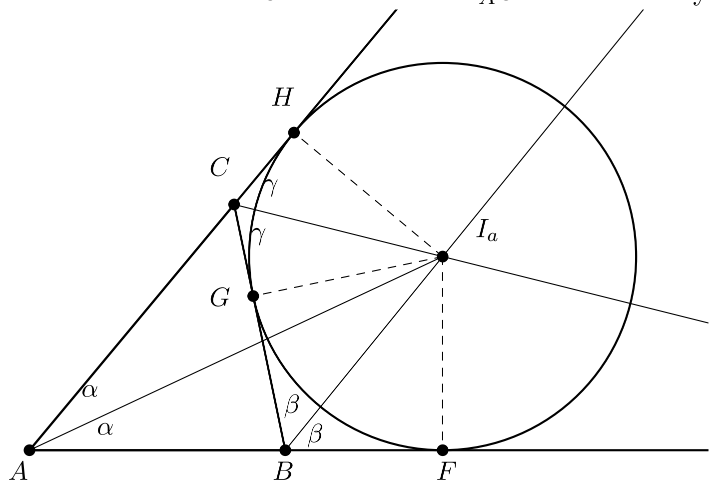
- una circunferencia que es tangente interiormente a los tres lados del triángulo (circunferencia inscrita).
- tres circunferencias que son tangentes a uno de los lados y a las prolongaciones de los otros dos lados (circunferencias exinscritas).

Sea I_A el punto de intersección de la bisectriz interior del ángulo $\angle A$ y la bisectriz exterior del ángulo $\angle C$.

Como I_A pertenece a la bisectriz interior del ángulo $\angle A$, entonces equidista de los lados AB y AC, pero como también pertenece a la bisectriz exterior del ángulo $\angle C$, entonces equidista de los lados BC y AC.

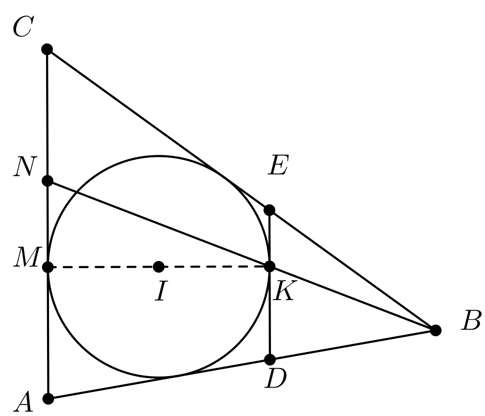
Lo anterior quiere decir que el punto I_A equidista de los lados AB y BC; esto es, la bisectriz exterior del ángulo $\angle B$ pasa por I_A, y por lo tanto la bisectriz interior del ángulo $\angle A$ y las bisectrices exteriores de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$ concurren en un punto, al cual se le llama el *excentro* respectivo al lado BC; se representa comúnmente como I_A.

Llamemos F, G, y H los pies de las perpendiculares desde I_A hacia los lados AB, BC, y CA. Tomamos la distancia I_AG como radio e I_A como centro y trazamos una circunferencia; tangente a AB, BC, y CA en los puntos F, G, y H. Esta circunferencia es llamada la circunferencia *exinscrita* del lado BC. La distancia I_AG es el *exradio* y se denota como r_A.



Ejemplo V.6. El $\triangle ABC$ tiene inscrita una circunferencia. Supongamos que M es el punto de tangencia de la circunferencia con el lado AC y que MK es el diámetro. La recta BK corta AC en el punto N. Demuestra que $AM = NC$.

Solución. Por K trazamos la recta DE paralela a AC. El triángulo $\triangle BDE$ es semejante al $\triangle BAC$. Tenemos que la circunferencia inscrita en el triángulo $\triangle ABC$ es la circunferencia exinscrita del triángulo $\triangle BDE$ (respectiva al lado DE), entonces N es el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita del triángulo $\triangle ABC$ con el lado AC. También tenemos que $BC + CN = s$, lo cual implica que $NC = s - a$, y como sabemos que $AM = s - a$, concluimos que $AM = NC$.



Problemas propuestos

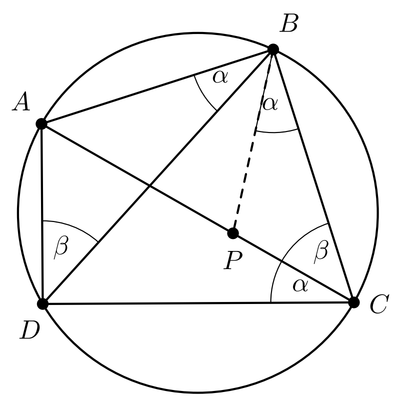
Problema V.13. El *triángulo órtico* del $\triangle ABC$ es el triángulo $\triangle H_aH_bH_c$ cuyos vértices son los pies de las alturas del $\triangle ABC$. Pruebe que el triángulo $\triangle ABC$ es el triángulo órtico del triángulo $\triangle I_AI_BI_C$.

V.9. Teorema de Ptolomeo

TEOREMA V.5 (Teorema de Ptolomeo). *Un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y sólo si*

$$AB\cdot\ CD + AD\cdot BC = AC\cdot BD.$$

Demostración. Primero supongamos que el cuadrilátero es cíclico. Consideremos un punto P sobre la diagonal AC de tal manera que $\angle PBC = \angle ABD = \alpha$.

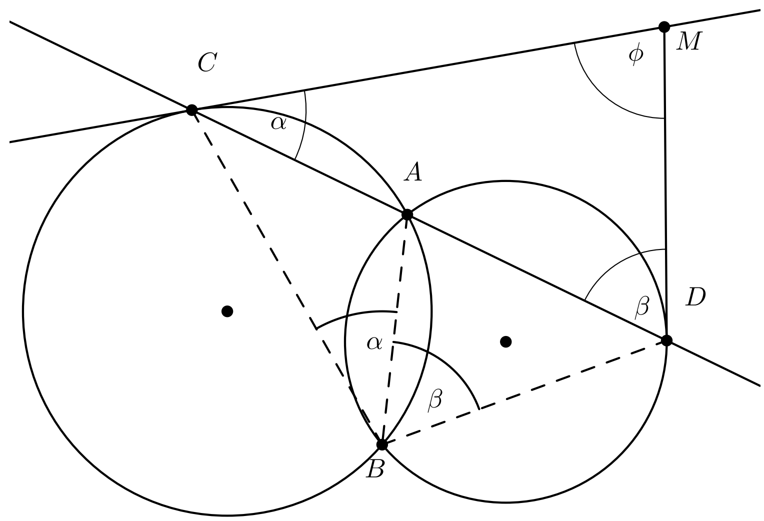


Dado que $ABCD$ es cíclico, también tenemos que $\angle PCB = \angle ADB = \beta$. De aquí se sigue que los triángulos $\triangle PBC$ y $\triangle ABD$ son semejantes, entonces $PC = \frac{BC\cdot AD}{BD}$. Como también $\triangle BAP$ y $\triangle BDC$ son semejantes, tenemos que $AP = \frac{AB\cdot CD}{BD}$. Sumando las dos expresiones obtenidas tenemos

$$AP + PC = AC = \frac{AB\cdot CD}{BD} + \frac{BC\cdot AD}{BD},$$

por lo tanto, $AC\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot AD$.

Ejemplo V.7. Dadas dos circunferencias C_1 y C_2 que se intersectan en los puntos A y B, por el punto A se traza una una recta que corta a las circunferencias C_1 y C_2 en los puntos C y D respectivamente y en estos puntos trazamos las respectivas tangentes a las circunferencias C_1 y C_2, estas dos tangentes se cortan en un punto M. Demostrar que el cuadrilátero $MCBD$ es cíclico.



Demostración. Demostraremos que $\angle CMD + \angle DBC = 180^0$, trazamos la cuerda común AB, como muestra el dibujo, y se ve entonces que $\angle MCA = \angle CBA = \alpha$, puesto que $\angle MCA$ es ángulo semi inscrito y $\angle CBA$ ángulo inscrito correspondiente. De la misma circunferencia. de la misma manera se tiene que $\angle MDA = \angle DBA = \beta$, pero por otro lado se tiene que $\alpha + \beta + \phi = 180^0$.

Problemas propuestos

Problema V.14. El triángulo equilátero $\triangle ABC$ está inscrito en una circunferencia y en el arco $\overset{\frown}{BC}$ se toma un punto arbitrario M. Demuestre que $AM = BM + CM$.

Problema V.15. Dado un triángulo $\triangle ABC$, sean I su incentro y L el punto donde la línea AI intersecta al circuncírculo. Demuestra que

$$\frac{AL}{LI} = \frac{AB + AC}{BC}.$$

V.10. Teoremas de Carnot, Ceva y Menelao

Lema V.1. *Se dan dos puntos A y B. Demuestre que el lugar geométrico de los puntos M tales que $\overline{AM}^2 - \overline{MB}^2 = k$, donde k es un número dado, es una recta perpendicular a AB.*

Teorema V.6 (Teorema de Carnot). *Demuestre que para que las perpendiculares bajadas desde los puntos A_1, B_1 y C_1 sobre los lados BC, CA y AB del triángulo $\triangle ABC$ se intersecten en un punto es necesario y suficiente que*

$$\overline{A_1B}^{\,2} - \overline{BC_1}^{\,2} + \overline{C_1A}^{\,2} - \overline{AB_1}^{\,2} + \overline{B_1C}^{\,2} - \overline{CA_1}^{\,2} = 0\,.$$

Teorema V.7 (Teorema de Ceva). *Dado un triángulo $\triangle ABC$ y D, E, F, puntos sobre los lados BC, CA y AB (o sus prolongaciones) respectivamente. Entonces, AD, BE y CF concurren si y sólo si*

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

Teorema V.8 (Teorema de Menelao). *Dado un triángulo $\triangle ABC$, sean D, E, F, puntos sobre los lados BC, CA, AB, (o sus prolongaciones) respectivamente. Entonces, D, E y F son colineales si y sólo si*

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1.$$

Las demostraciones de estos teoremas clásicos se dejan para ser desarrolladas por el lector.

Problemas propuestos

Problema V.16. Cinco puntos distintos A, B, C, D y E están sobre una línea con $AB = BC = CD = DE$. El punto F está fuera de la línea. Sea G el circuncentro del triángulo $\triangle ADF$ y H el circuncentro del triángulo $\triangle BEF$. Muestre que las líneas GH y FC son perpendiculares .

Problema V.17. Se dan tres circunferencias que se intersectan de dos en dos. Pruebe que tres cuerdas comunes de estas circunferencias pasan por un mismo punto .

Problema V.18. Utilizando el teorema de Ceva demuestre que

(i) Las transversales de un triángulo concurren.
(ii) Las bisectrices de los ángulos internos de un triángulo son concurrentes.
(iii) Las alturas de un triángulo son concurrentes.

Problema V.19. Si D, E y F son los puntos de contacto de la circunferencia inscrita al triángulo $\triangle ABC$ con lados BC, CA y AB respectivamente, demuestre que AD, BE, CF son concurrentes. Este punto de concurrencia es llamado el *punto de Gergonne* del triángulo.

Problema V.20. Considere D, E y F los puntos de los lados BC, CA y AB del triángulo $\triangle ABC$ tales que D esté en la mitad del perímetro a partir de A, E en la mitad a partir de B, y F en la mitad a partir de C. Demuestra que AD, BE, CF son concurrentes. Este punto de concurrencia se llama *punto de Nagel* del triángulo.

Problema V.21. Sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito en un círculo. Demuestra que las diagonales AD, BE y CF son concurrentes si y sólo si

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1\,.$$

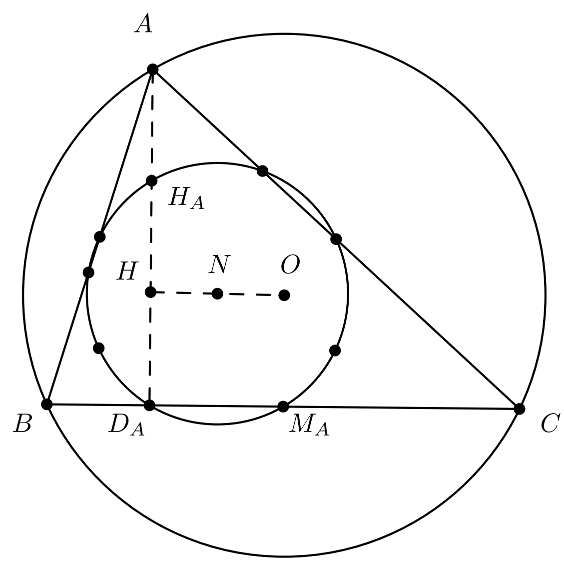
V.11. Circunferencia de los nueve puntos

TEOREMA V.9. *En un triángulo consideremos los siguientes 9 puntos : los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos que unen cada vértice con el ortocentro. Estos 9 puntos están sobre una circunferencia, llamada Circunferencia de los Nueve Puntos. Su centro es el punto medio del segmento que une el circuncentro y el ortocentro y su diámetro es igual al circunradio del triángulo .*

Demostración. Sean H_A, D_A y M_A el punto medio de AH, el pie de la altura desde A y el punto medio de BC respectivamente. De manera análoga se definen H_B, D_B, M_B, H_C, D_C, y M_C. Sea N el punto medio de HO.

Sabemos que $AH = 2 \cdot OM_A$, entonces $H_AH = OM_A$ y además, como H_AH y OM_A son paralelas, tenemos que H_A, N y M_A son colineales. También sabemos que $ND_A = NH_A = NM_A$, además, $NH_A = \frac{1}{2}OA = R$, donde R es el circunradio del triángulo $\triangle ABC$.

Con esto tenemos que los puntos H_A, D_A y M_A están a distancia $\frac{R}{2}$ del punto N. Análogamente se demuestra que H_B, D_B, M_B, H_C, D_C, y M_C están a distancia $\frac{R}{2}$ del punto N. Por lo tanto, los puntos $H_A, D_A, M_A, H_B, D_B, M_B, H_C, D_C$, y M_C están sobre una circunferencia de radio $\frac{R}{2}$ con centro en el punto medio de OH.



Problemas propuestos

Problema V.22. Demuestre que las perpendiculares trazadas desde los puntos medios de los lados de un triángulo, sobre las tangentes al circuncírculo en el vértice opuesto respectivo, concurren en el centro de la Circunferencia de los Nueve Puntos del triángulo.

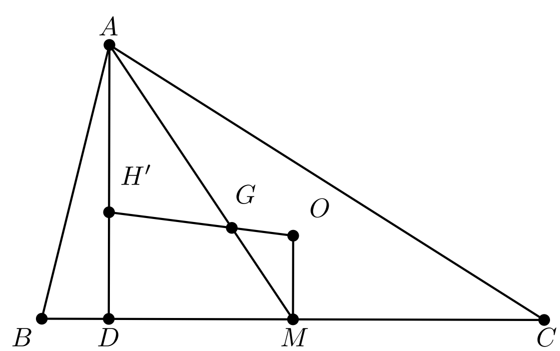
Problema V.23. Sean H el ortocentro de un triángulo $\triangle ABC$ y D el punto medio del lado BC y P uno de los puntos de intersección de la recta HD con el circunclrculo del triángulo $\triangle ABC$. Demuestre que D es el punto medio de HP.

Problema V.24. En un triángulo $\triangle ABC$, sean BD la altura, BM la transversal, y P y Q las proyecciones de los puntos A y C sobre la bisectriz del ángulo $\angle B$. Demuestre que los puntos D, M, P y Q están sobre una circunferencia, cuyo centro está sobre la circunferencia de los nueve puntos del triángulo $\triangle ABC$.

V.12. Líneas de Euler y de Simson

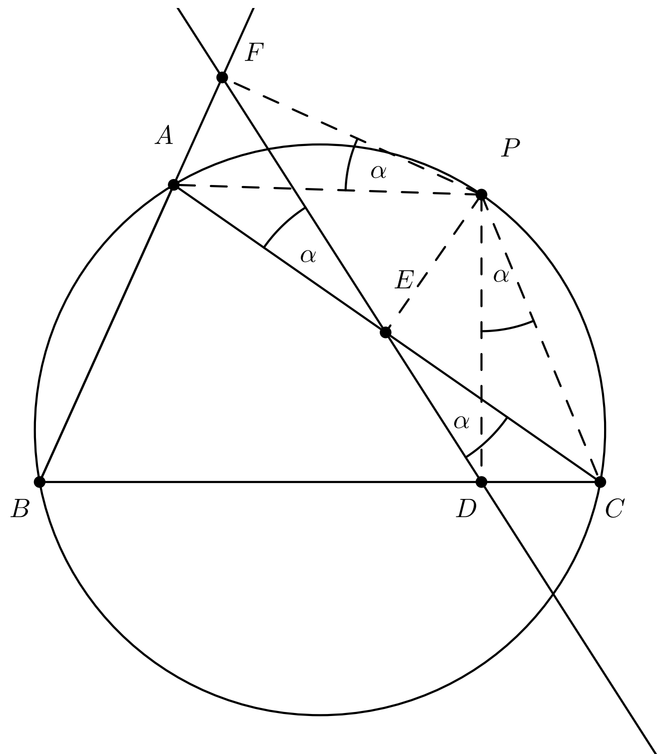
TEOREMA V.10 (Línea de Euler). *En todo triángulo , el ortocentro H, el centroide G y el circuncentro O se encuentran sobre una línea, llamada línea de Euler. Además, $HG : GO = 2 : 1$.*

Demostración. Considere M el punto medio del lado BC. Consideremos un punto H' sobre el rayo OG de tal manera que $H'G = 2 \cdot GO$. Sabemos que $AH' = 2 \cdot OM$ y que $AG = 2 \cdot GM$, además $\angle AGH' = \angle MGO$, entonces los triángulos $\triangle AGH'$ y $\triangle MGO$ son semejantes y sus lados están en razón $2 : 1$. Con esto, tenemos que AH' es paralela a OM y por lo tanto, perpendicular a BC. Análogamente, se demuestra que $BH' \perp AC$ y que $CH' \perp AB$, por lo tanto, $H' = H$ es el ortocentro del triángulo $\triangle ABC$. Concluimos que H, G y O están alineados y que $HG : GO = 2 : 1$.



TEOREMA V.11 (Línea de Simson). *Las proyecciones de un punto P que está sobre el circuncírculo de un triángulo hacia los lados de éste son colineales. Esta línea es llamada Línea de Simson del punto P.*

Demostración. Llamemos D, E y F las proyecciones de P sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Tenemos que los cuadriláteros $PABC$, $PFAE$ y $PEDC$ son cíclicos. Además, como $\angle PAF = \angle PCD$ tenemos que $\angle APF = \angle CPD = \alpha$. Ahora, utilizando que los cuadriláteros $PFAE$ y $PEDC$ son cíclicos, tenemos que $\angle AEF = \angle APF = \alpha$ y $\angle CED = \angle CPD = \alpha$. Así hemos probado que los puntos D, E y F son colineales.



Problemas propuestos

Problema V.25. ¿ Qué lados corta la recta de Euler en los triángulos acutángulo y obtusángulo?

Problema V.26. Sea K un punto simétrico al circuncentro de un triángulo $\triangle ABC$ con respecto al lado BC. Demuestre que la línea de Euler en el triángulo $\triangle ABC$ divide el segmento AK por la mitad.

Problema V.27. Demuestre que el ángulo comprendido entre las rectas de Simson que corresponden a dos puntos de una circunferencia es equivalente a la mitad del arco entre estos puntos .

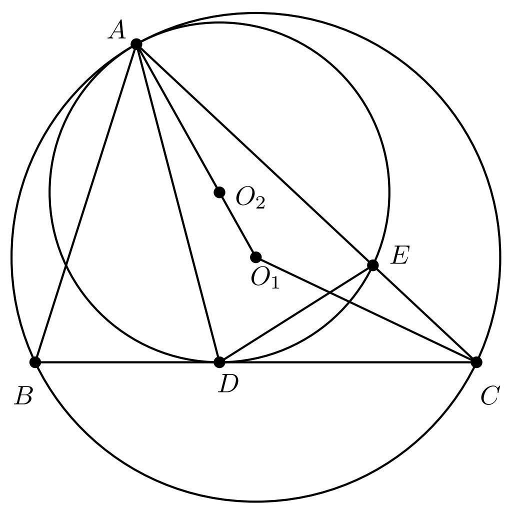
Problema V.28. Sea P un punto sobre la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo $\triangle ABC$. La recta perpendicular a BC que pasa por P corta por segunda vez a la circunferencia en el punto M. Demuestra que la recta de Simson que corresponde al punto P es paralela a la recta AM.

Problema V.29. Demuestre que la proyección del lado AB de un triángulo $\triangle ABC$ sobre la recta de Simson que corresponde a un punto P es igual a la distancia entre las proyecciones del punto P sobre los lados AC y BC.

V.13. Problemas resueltos

Problema V.30. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ circunferencias tangentes internas en un punto A, con $\mathcal{C}_2$ en el interior de $\mathcal{C}_1$. Sea BC una cuerda de $\mathcal{C}_1$, de manera que es tangente a $\mathcal{C}_2$. Pruebe que la razón entre la longitud de BC y el perímetro del triángulo ABC es constante; es decir, no depende de la elección de la cuerda BC que se elija para construir el triángulo.

Solución. Sea D el punto de tangencia de BC y $\mathcal{C}_2$. Sea además E la segunda intersección de AC y $\mathcal{C}_2$.



Por el Teorema del ángulo semi-inscrito, se tiene que $\angle CAD = \angle CDE$. Esto implica que los triángulos ADC y DEC son semejantes, por lo cual $\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CD}$. Por otro lado, si O_1 y O_2 son los respectivos centros de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, entonces $O_2A = O_2E$ y $O_1A = O_1C$. Por ello, $\angle O_2EA = \angle O_2AE = \angle O_1AC = \angle O_1CA$, probando que $O_2E \parallel O_1C$. Esto implica que los triángulos O_1AC y O_2AE son semejantes, por lo que $\frac{AE}{AC} = \frac{EO_2}{CO_1} = \frac{r_2}{r_1}$. Finalmente,

$$\frac{CD}{CA} = \sqrt{\frac{CD}{CA} \cdot \frac{CE}{CD}} = \sqrt{\frac{CE}{CA}} = \sqrt{1 - \frac{AE}{AC}} = \sqrt{\frac{r_1 - r_2}{r_1}}.$$

Similarmente, se demuestra que $\frac{BD}{BA} = \sqrt{\frac{r_1-r_2}{r_1}} = \frac{CD}{CA}$, de donde se sigue que

$$\frac{AB + BC + CA}{BC} = 1 + \frac{AB + AC}{BD + DC} = 1 + \frac{AB}{BD} = 1 + \sqrt{\frac{r_1}{r_1 - r_2}},$$

probando que, efectivamente, la razón entre la longitud de BC y el perímetro del triángulo ABC no depende de la elección de la cuerda BC.

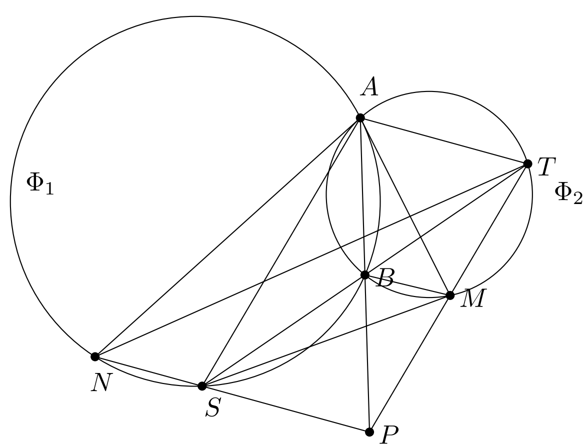
Problema V.31. En un triángulo equilátero, la suma de las distancias desde un punto P en el interior del triángulo a sus tres lados es constante (no depende de la posición del punto P) y es igual a la altura del triángulo.

Solución. Para una demostración basta considerar los tres triángulos que se forman al considerar un par de vértices y el punto P y calcular sus áreas. Es claro que la suma de las áreas de estos tres triángulos es igual al área del triángulo completo, que por ser equilátero vale $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, pero las áreas de los tres triángulos con vértice P suman $\frac{a}{2}(PE+PF+PG)$, donde E,F,G son los pies de las perpendiculares desde el punto P a cada uno de los lados. Por tanto se tiene:

$$\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a}{2}(PE+PF+PG)$$

de donde tenemos que $(PE+PF+PG) = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, que es el valor de la altura del triángulo equilátero de lado a.
Otra forma de demostrarlo es trazando tres paralelas a los lados del triángulo por el punto P, con lo que formamos tres triángulos equiláteros al interior del triángulo original, y debemos demostrar que la suma de estas tres alturas de estos tres triángulos es igual a la altura del triángulo equilátero original (lo que resulta sencillo).

Problema V.32. Las circunferencias Φ_1 y Φ_2 se intersectan en dos puntos diferentes A y B. La tangente a Φ_1 por A intersecta a Φ_2 en M y la tangente a Γ_2 por A que corta a Φ_1 en N. Sea P la reflexión de A con respecto a B. Sean S y T los puntos de intersección de las rectas PM y PN con Φ_1 y Φ_2, respectivamente. Pruebe que los puntos S, B, T son colineales.



Solución. Por el teorema del ángulo semiinscrito obtenemos que

$$\angle AMB = \angle BAN, \qquad \angle ANB = \angle BAM$$

luego $\angle NBP = \angle BNA + \angle NAB = \angle BMA + \angle MAB = \angle MBP$ y $\triangle NBA \sim \triangle ABM$, por lo que

$$\frac{NB}{AB} = \frac{AB}{BM}$$

Pero $AB = BP$ entonces $\frac{NB}{BP} = \frac{BP}{BM}$ y concluimos que $\triangle NPB \sim \triangle PMB$, por ende

$$\angle SPT = \angle NPB + \angle BPM = \angle BMP + \angle BNS = \angle PAT + \angle SAP = \angle SAT$$

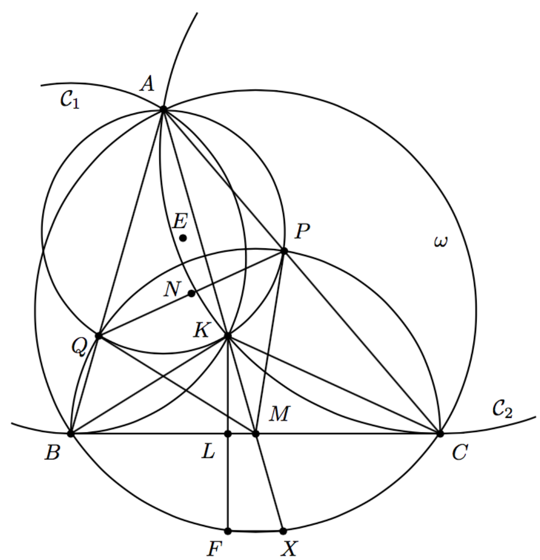
Además

$$\angle ATP = \angle ATB + \angle BTM = \angle NAB + \angle BAM = \angle BSP + \angle BSA = \angle ASP\,,$$

entonces el cuadrilátero $SATP$ tiene sus dos pares de ángulos opuestos iguales y rápidamente podemos deducir que es un paralelogramo. Pero B es el punto medio de la diagonal AP, por lo que ST debe pasar por B, lo cual finaliza la demostración.

Problema V.33. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias, las cuales se intersectan en A y K. La tangente común a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ más cercana a K toca a $\mathcal{C}_1$ en B y a $\mathcal{C}_2$ en C. Sea P el pie de la perpendicular de B sobre AC, y sea Q el pie de la perpendicular de C sobre AB. Finalmente, sean E y F las reflexiones de K respecto de las rectas PQ y BC (puntos simétricos), respectivamente. Pruebe que A, E, F, son colineales.

Solución. Sea ω la circunferencia que pasa por A, B y C, y sea X la intersección de AK con ω. Primero observemos que, por ser BC tangente a $\mathcal{C}_1$, se tiene que $\angle CBK = \angle BAK$, en virtud del Teorema del ángulo semi-inscrito.



Por otra parte, por ser cíclico el cuadrilátero $ABXC$, se tiene que $\angle XAB = \angle XCB$. Por tanto, $\angle XCB = \angle XAB = \angle KAB = \angle KBC$, por lo que KB y XC son paralelas.

Similarmente, KC y XB son también paralelas, por lo que $KCXB$ es un paralelógramo, y sus diagonales KX y BC se intersectan en su punto medio, al que llamaremos M.

Observemos que F pertenece a ω. En efecto, por ser F la reflexión de K respecto de BC, se tiene que $\angle BFC = \angle BKC$.

Puesto que $KBXC$ es un paralelógramo, se tiene también que $\angle BKC = \angle BXC$. Por tanto, $\angle BFC = \angle BXC$, por lo que $BFXC$ es un cuadrilátero cíclico, y F pertenece a ω.

Sea L la intersección de KF con BC. Por ser F la reflexión de K respecto de BC, se sigue que L es punto medio de KF. Puesto que M es punto medio de KX, se tiene que $FX \parallel LM$;es decir, $FX \parallel BC$. Esto implica que los arcos $\widehat{BF}$ y $\widehat{CX}$ de ω son iguales, así que $\angle XAC = \angle FAB$.

Por otra parte, por hipótesis, los ángulos $\angle BPC$ y $\angle CQB$ son ambos rectos, por lo que el cuadrilátero $PQBC$ es cíclico, y su circuncentro es el punto medio M de BC.

Observemos que, por ser los triángulos MBP, MPQ, MQC isósceles, tenemos

$$\begin{aligned}\angle PQM &= 90^\circ - \frac{\angle PMQ}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ - \angle QMB - \angle PMC}{2}\\ &= \frac{\angle QMB + \angle PMC}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle QBM + 180^\circ - 2\angle PCM}{2}\\ &= 180^\circ - \angle QBM - \angle PCM = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB\\ &= \angle BAC = \angle PAQ,\end{aligned}$$

por lo que MP y MQ son tangentes al circuncírculo de APQ, en virtud del Teorema del ángulo semi-inscrito.

Observemos que K pertenece al circuncírculo de APQ. En efecto, por ser $\mathcal{C}_1$ tangente a BC, tenemos que la potencia de M respecto a $\mathcal{C}_1$ puede calcularse como $MB^2 = MK{\cdot}MA$. Por ser $MB = MP$, se tiene que $MP^2 = MK{\cdot}MA$, y por ser MP tangente al circuncírculo de APQ, se sigue que $MK \cdot MA$ es la potencia de M al circuncírculo de APQ. Por ello, K pertenece a dicho circuncírculo, es decir, $APKQ$ es un cuadrilátero cíclico.

Además, $\angle AQP = \angle ACB$ y $\angle APQ = \angle ABC$, por lo que los triángulos ABC y APQ son semejantes. Por otro lado, sea N la intersección de PQ con AF. Probaremos que N es el punto medio de PQ. Puesto que $\angle NAQ = \angle FAB = \angle XAC = \angle MAC$, se sigue que los puntos N y M son homólogos en la semejanza de los triángulos APQ y ABC. Por ser M el punto medio de BC, también se tiene que N es punto medio de PQ.

Puesto que el cuadrilátero $APKQ$ es cíclico, tenemos que K es el punto del circuncírculo de APQ tal que $\angle KAP = \angle NAQ$. Puesto que, en la semejanza de los triángulos APQ y ABC los puntos N y M son homólogos, lo anterior implica que K y F son también homólogos.

Por ser E la reflexión de K respecto PQ, y por ser K la reflexión de F respecto BC, se sigue que los puntos E y K son homólogos también. En particular, $\angle KAC = \angle EAQ$, es decir,

$$\angle EAB = \angle EAQ = \angle KAC = \angle XAC = \angle FAB,$$

lo cual implica que los puntos A, E, F son colineales, como queríamos.

Problema V.34. Pruebe que en cualquier triángulo

$$\text{mín}(a,b,c) + 2\,\text{máx}(m_a,m_b,m_c) \geq \text{máx}(a,b,c) + 2\,\text{mín}(m_a,m_b,m_c)\,,$$

donde m_a, m_b, m_c denotan los largos de las transversales y a, b, c denotan los largos de los lados.

Solución. Escribimos la desigualdad como

$$2\,\text{máx}(m_a,m_b,m_c) - 2\,\text{mín}(m_a,m_b,m_c) \geq \text{máx}(a,b,c) - \text{mín}(a,b,c).$$

Sin pérdida de generalidad asumimos que $a \geq b \geq c$. Entonces, por la fórmula de las transversales, $m_a \leq m_b \leq m_c$ y tenemos que probar que $2(m_c - m_a) \geq a - c$. Esto es equivalente a

$$2(a^2+b^2) - c^2 - 8m_cm_a + 2(b^2+c^2) - a^2 \geq a^2 - 2ac + c^2,$$

que se reduce a

$$4m_cm_a \leq 2b^2 + ac.$$

Esto sigue de la desigualdad de Ptolomeo en el cuadrilátero $ACMN$, donde M y N son los puntos medios de los lados BC y AB, o bien directamente, como sigue. Precisamente,

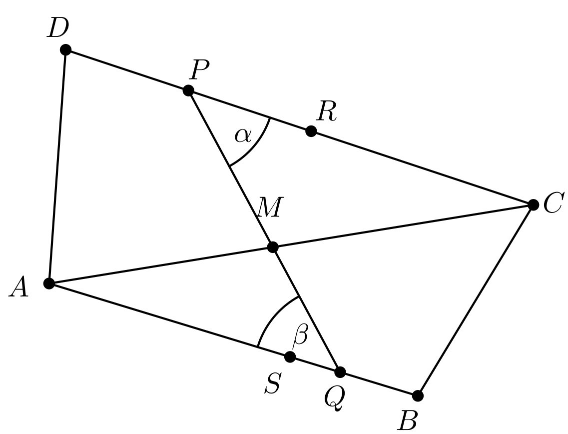
$$m_cm_a \leq b \cdot \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{c}{2},$$

o, directamente,

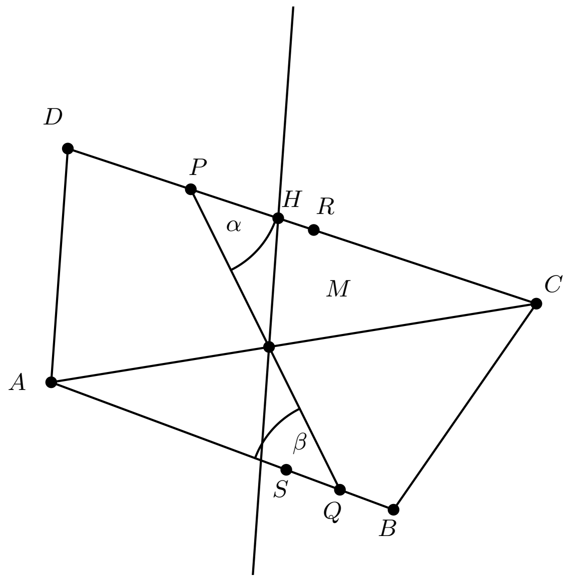
$$[2(a^2+b^2) - c^2][2(b^2+c^2) - a^2] \leq (2b^2+ac)^2,$$

que se reduce a $(c-a)^2[(c+a)^2 - b^2] \leq 0$, lo cual es evidente. La igualdad vale si y sólo si el triángulo ABC es equilátero.

Problema V.35. En el cuadrilátero $ABCD$ de la figura, se tiene: $AD = CR = a$; $BC = AS = b$; P punto medio de DR ; Q punto medio de SB $\angle MPC = \alpha$; $\angle MQA = \beta$. donde M es el punto medio de AC. Demuestre que si $\alpha + \beta = 90$, entonces el cuadrilátero es cíclico.



Solución. Se traza por M una paralela al lado AD cortando al lado DC en el punto H, Como MH es mediana del tringulo ACD, se tiene $MH = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$ y como $DH = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}(a + 2 \cdot PR)$ por lo tanto se tiene que $HP = \frac{a}{2}$ así que el triángulo PMH es isósceles y como $\angle MHC = \angle ADC$ por lo tanto $\angle MHC = \angle ADC = 2\alpha$.



Análogamente (trazando una paralela por M a CB) se demuestra que $\angle DBA = 2\beta$. Y como $\alpha + \beta = 90$ entonces $\angle ADC + \angle ABC = 180^o$ por lo tanto el cuadrilátero es cíclico.

Capítulo VI

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema VI.1. Determine el número de cuadrados perfectos que hay entre 40,000 y 640,000, que además son múltiplos simultáneamente de 3, 4 y 5.

Solución. Sea n un número entero positivo tal que $40.000 \leq n^2 \leq 640.000$ y tal que $n^2 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot N = 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot N$ con N entero. Debemos tener entonces que $200 \leq n \leq 800$ y que n es divisible por $2, 3$, y 5. Luego buscamos números entre 200 y 800 que son múltiplos de 30; esto es, números de la forma $n = 210 + 30k$. Estos son menores que 800 sólo para $k = 0, 1, \ldots, 19$. Por lo tanto, hay 20 cuadrados perfectos entre 400,000 y 640,000 que son múltiplos de $3, 4$ y 5 simultáneamente.

Problema VI.2. ¿Para que números naturales n se tiene que $(n-1)!$ es divisible por n?

Solución. Es claro que $n = 1$ divide a $(1-1)! = 0! = 1$.

Si n es primo entonces $(n; i) = 1$ (el máximo común divisor entre n e i) para todo $i < n$. Luego, $(n; (n-1)!) = 1$, por lo que n no divide a $(n-1)!$.

Si n es compuesto y se puede expresar de la forma $n = a\,b$, con $1 < a \neq b < n$, entonces n divide a $(n-1)!$, pues a y b se encuentran en el producto $1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1)!$.

Ahora, si n es compuesto y no se puede expresar de la forma $n = a\,b$,con $1 < a \neq b < n$, entonces $n = p^2$ para algún primo p. En este caso, si $p \geq 3$ entonces tenemos que $n - 1 \geq 2p$, por lo que p y $2p$ están en el producto $1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) = (n-1)!$ y por lo tanto $n = p^2$ divide a $(n-1)!$. Si $p = 2$, se verifica rápidamente que 4 no divide a $3! = 6$.

Luego, los números que satisfacen lo pedido son 1 y todos los números compuestos a excepción del 4.

Problema VI.3. Determine todos los números enteros positivos que son soluciones de la ecuación $x^3 - y^3 = 602$.

Solución. Observemos que $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ y $602 = 2 \cdot 7 \cdot 43$.
Además $x - y < x^2 + xy + y^2$ si x, y son enteros positivos. Se debe resolver entonces

$$\begin{aligned} x - y &= A \\ x^2 + xy + y^2 &= B \end{aligned}$$

donde $A < B$, y experimentando con los pares (A, B) posibles $(1, 602)$, $(2, 301)$, $(7, 86)$ y $(14, 43)$ se obtiene que el único que produce soluciones enteras es $(2, 301)$, a saber $x = 11$, $y = 9$.

Problema VI.4. Natalia y Marcela cuentan de 1 en 1 empezando juntas en 1, pero la velocidad de Marcela es el triple que la de Natalia (cuando Natalia dice su segundo número, Marcela dice el cuarto número). Cuando la diferencia de los números que dicen al unísono es algunos de los múltiplos de 29 entre 500 y 600, Natalia sigue contando normalmente y Marcela empieza a contar en forma descendente de tal forma, que en un momento, las dos dicen al unísono el mismo número. ¿Cuál es este número?

Solución. (Cristián García Palomer). La forma de contar de Marcela y Natalia está definida de la siguiente manera:

n(número de pasos)	$Natalia\ (X)$	$Marcela(Y)$
0	1	1
1	2	4
2	3	7
3	4	10
4	5	13
5	6	16
6	7	19

Se observa que la forma de contar de Natalia es $f(n) = n + 1$ y la forma de contar de Marcela es $g(n) = 3n + 1$.

Ahora buscamos los múltiplos de 29 entre 500 y 600, los cuales son 522, 551 y 580. Sabemos que uno de estos tres números es igual a la diferencia a entre el número dicho en un instante por Natalia y el dicho en el mismo momento por Marcela. Esto es,

$$\begin{aligned} 3n + 1 - (n + 1) &= a \\ 2n &= a\,. \end{aligned}$$

Como sabemos que a es un número par, descartamos el 551, y nos quedan los números 522 y 580 como posibles diferencias. Como sabemos que Natalia sigue contando de 1 en 1 y Marcela retrocede de 3 en 3, en cada paso el número dicho por Natalia se acerca en cuatro al dicho por Marcela. Por lo tanto, la diferencia entre los números dichos por una y otra (522 o 580 inicialmente) deberá ser siempre un número múltiplo de 4, para que así lleguen a pronunciar en un momento el mismo número. Luego descartamos a 522, ya que no es múltiplo de 4.

Ahora sabemos que la diferencia en el instante en que dejaron de contar es 580: esto es, $2n = 580$ de donde $n = 290$. En este instante Natalia pronunció el número $n + 1 = 291$ y Marcela el número $3n + 1 = 871$. A partir de estos números, Natalia aumenta en uno y Marcela disminuye en 3. Para resolver nuestro problema buscamos m tal que $291 + m = 871 - 3m$. Esto nos da que $m = 145$. Por lo tanto el número buscado en que se encuentran es $291 + 145 = 436$.

Problema VI.5. Encuentre todos los tríos de números enteros positivos (a,b,c), con $a<b<c$ tales que la suma $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ es un número entero.

Solución. (José Soto.) Como a, b y c son números enteros positivos, con $a<b<c$, el mayor valor posible de la suma $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ es $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}<2$, luego siempre tenemos $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<2$ para cada trío de números enteros positivos (a,b,c) con $a<b<c$. Como queremos que la suma anterior sea un número entero, se debe tener entonces que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Luego, si $a=1$: $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, lo cual es imposible. Así, $1<a<b<c$.

Si $a=4$ entonces la mayor suma posible es $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{37}{60}<1$, luego debemos tener que $a\leq 3$.

Para $a=2$: $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$ y $2<b<c$. Si $b=3$ entonces $c=6$ y tenemos la solución $(a,b,c)=(2,3,6)$.

Para $b\geq 4$: $c\leq 4$, lo cual no puede ocurrir.

Para $a=3$ la mayor suma posible es $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<1$, por lo que no podemos tener que $a=3$. En conclusión la única solución es $(a,b,c)=(2,3,6)$.

Problema VI.6. Encuentre la suma S_n donde

$$S_n = 1+11+111+\cdots+\underbrace{11\cdots1}_{n\text{-unos}}.$$

Solución. Podemos reescribir S_n como sigue:

$$S_n = 1+(1+10)+(1+10+10^2)+\cdots+(1+10+\cdots+10^{n-1}).$$

Observe que dentro de cada paréntesis aparece la suma de los términos de una progresión geométrica, luego

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\cdots+\frac{10^n-1}{9} \\ &= \frac{1}{9}(10+10^2+\cdots+10^n-n)=\frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9}-n\right) \end{aligned}$$

Problema VI.7. Probar que las expresiones

$$2x+3y \quad , \qquad 9x+5y$$

son divisibles por 17 para los mismos valores enteros x e y.

Solución. Llamemos $w = 2x + y$, $z = 9x + 5y$ a las expresiones dadas. Claramente se tiene que

$$4w + z = 17(x + y).$$

Luego 17 divide a $(4w + z)$. Además si $17|4w$ entonces $17|w$ puesto que $(17; 4) = 1$. Finalmente es claro de la igualdad que $17|w$ si y solamente si $17|z$.

Problema VI.8. Considere la sucesión de números a_n , $n \in \mathbb{N}$, dada por

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Pruebe que para cada n número natural $a_n < 3$.

Solución. Para cada n número natural se satisface desigualdad $n! \geq 2^{n-1}$. Luego $1/n! \leq 1/2^{n-1}$. Entonces obtenemos que

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Puesto que la serie geométrica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

de razón $1/2$ posee suma igual a 2 se obtiene que $a_n \leq 3$.

Problema VI.9. Determine los tres últimos dígitos de 7^{9999}.

Solución. Observe que $7^4 = 2401$. Luego

$$7^{4n} = (2401)^n = (1 + 2400)^n.$$

aplicando el binomio de Newton se obtiene que

$$(1 + 2400)^n = 1 + n \cdot 2{,}400 + \binom{n}{2} (2{,}400)^2 + \cdots .$$

De esta última expresión es claro que después del segundo término todos los números terminan en al menos cuatro cero. Luego los últimos tres dígitos de 7^{4n} están determinados por la expresión

$$1 + n \cdot 2400 = 24 \cdot n \cdot 100 + 1.$$

Sea m el último dígito de $24 \cdot n$. Entonces $1 + 2400 \cdot n$ terminará en $m01$. Tomemos un n adecuado para formar 9999. Claramente $9999 = 9996 + 3$ y luego

$$7^{9999} = 7^{9996} \cdot 7^3.$$

Notemos que 9996 es un múltiplo de 4, $9996 = 4 \cdot 2499$. Por lo analizado anteriormente se induce que $7^{9996} = 7^{4 \cdot 2499}$ termina en 601. Como 7^3 termina en 343 se obtiene que el número en cuestión debe terminar en 143.

Problema VI.10. Considere b, d dos enteros distintos no nulos. Sea f la función dada por la expresión:

$$f(x) = \frac{x+b}{x+d}, \qquad x \neq -d,$$

donde x es un número real y $b + d^2 \neq 0$. Suponga que $f(0) \neq 0$ y que $f(f(0)) \neq 0$.

Denotemos por $f^{(k)}$ la función resultante al componer k-veces la función f consigo misma, o sea,

$$f^{(k)} = f \circ \cdots \circ f \qquad \text{(k-veces)}.$$

Pruebe que si $f^{(1992)}(0) = 0$ entonces $f^{(1992)}(x) = x$ para todo x donde la expresión tenga sentido.

Solución. Observemos que para todo entero $k \geq 1$ la expresión que representa a $f^{(k)}$ tiene una forma similar a f, es decir,

$$f^{(1992)}(x) = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}$$

donde a_1, b_1, c_1 y d_1 son números enteros.

Además $f^{(1992)}(s) = s$ (para s donde el denominador no se anule) si y solamente si s es solución de la ecuación de segundo grado:

$$c_1 x^2 + (d_1 - a_1)x - b_1 = 0.$$

Sabemos que tal ecuación posee a lo más dos soluciones. Luego si ella posee más de dos soluciones entonces los coeficientes de la ecuación deben ser todos nulos, o sea $c_1 = 0$, $d_1 - a_1 = 0$ y $b_1 = 0$ y luego $f^{(1992)}(x) = x$ para todo x donde la expresión de $f^{(1992)}$ tenga sentido.

Visto lo anterior bastará con encontrar tres números $z_0,\ w_0,\ r_0$ distintos tales que

$$f^{(1992)}(z_0) = z_0, \qquad f^{(1992)}(w_0) = w_0 \quad \text{y} \quad f^{(1992)}(r_0) = r_0.$$

Notemos que por composición de funciones se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} f^{(1992)}(f(0)) \quad &= f(f^{(1992)}(0)) = f(0) \\ f^{(1992)}(f^{(2)}(0)) \quad &= f^{(2)}(f^{(1992)}(0)) = f^{(2)}(0) \end{aligned}$$

Elijamos $z_0 = f(0)$, $w_0 = f^{(2)}(0))$ y $z_0 = 0$. Como $b \neq d$ se obtiene que $f(0) \neq f(f(0))$, obteniéndose lo pedido.

Problema VI.11. Suponga que el número

$$\sqrt[3]{2+\frac{10}{9}\sqrt{3}}\ +\ \sqrt[3]{2-\frac{10}{9}\sqrt{3}}$$

es un número entero. Calcule dicho número.

Solución. Este problema puede ser resuelto mediante manipulaciones algebraicas intrincadas. Otra forma de enfrentarlo es observar que la raíz cubica satisface la siguiente propiedad de monotonicidad:

$$\text{si}\ \ 0 \leq x \leq y\ \ \text{entonces}\ \ \sqrt[3]{x} \leq \sqrt[3]{y}.$$

Denotemos por u y por v las expresiones

$$u = 2+\frac{10}{9}\sqrt{3}\ ,\ \ v = 2-\frac{10}{9}\sqrt{3}.$$

Es casi inmediato ver que $u,\ v$ satisfacen las desigualdades $2 < u < 8$ y $0 < v < 1$. Por lo tanto aplicando la monotonicidad se obtiene que

$$\sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{u} < \sqrt[3]{8}$$
$$0 < \sqrt[3]{v} < \sqrt[3]{1}.$$

Aplicando las propiedades de las desigualdades se tiene que $1 < \sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v} < 3$. Puesto que sabemos que la expresión dada representa un número entero entonces no queda otra alternativa que tal entero sea el 2 .

Problema VI.12. Un hijo envía a su padre, el cual es matemático, desde Inglaterra una carta en la cual escribe lo siguiente

$$\begin{array}{r} SEND \\ \underline{+\ MORE} \\ MONEY \end{array}$$

Encuentre la cantidad de dinero que está pidiendo el hijo si cada letra representa un dígito distinto.

Solución. (Cristián García Palomer).

a) M sólo puede ser 1.
b) Ya que $M = 1$, entonces $S = 8$ o 9. Si ocurre que $S = 8$ entonce O debe ser cero y E es 9. En este caso $N = 0$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $S = 9$.
c) Como $M = 1$ y $S = 9$ se cumple que $O = 0$. Ya que se cumple $E + 1 = N$ o $E + 1 = 10 + N$ debemos tener que $E + 1 = N$ pués $N \geq 2$.
d) Como $N+R = 10+E$ o $N+R+1010+E$ debemos tener que $N+R+1 = 10+E$, ya que si $N + R = 10 + E$ entonces $E + 1 + R = 10 + E$ y $R = S = 9$, por lo tanto $R = 8$.

e) Sabemos que $D+E=Y$ o $D+E=10+Y$. La primera hipótesis no es posible pues implica que $N+R=10+E$, por lo tanto $D+E=10+Y$.
   Si $E=2$ entonces $D=8+Y$, contradicción,
   Si $E=3$ entonces $D=7+Y$, contradicción,
   Si $E=4$ entonces $D=6+Y$ y como $Y\geq 2$ se tiene que $D\geq 6$, contracción,
   Si $E=5$ entonces $N=6$ y $D=5+Y$, de donde obtenemos que $Y=2$. Esta es una solución.
   Si $E=6$ entonces $N=7$ y $D=4+Y$,, como $Y\geq 2$, no tenemos solución.

Por lo tanto la solución al problema es:

$$\begin{array}{r} 9567 \\ +\ 1085 \\ \hline 10652 \end{array}$$

Problema VI.13. Pruebe que $n(n+1)(n+2)$ es un número divisible por 6 para todo $n\in\mathbb{N}$.

Solución. Tenemos que

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

esto es, $n(n+1)=2(1+2+\ldots+n)$. Por lo tanto $n(n+1)$ es divisible por 2. Por otra parte, se tiene que uno de los tres números consecutivos n, $n+1$ o $n+2$ debe ser divisible por 3. De esto se sigue que el producto $n(n+1)(n+2)$ es divible por 6.

Problema VI.14. Pruebe que para cada $n\in\mathbb{N}$, $2^{2n}-3n-1$ es divisible por 9.

Solución. Definamos $P(n)=2^{2n}-3n-1$. Es inmediato que $P(1)=0$ y puesto que 0 es divisible por 9, la proposición es cierta para $n=1$.

Supongamos que la proposición es verdadera para $n=k$, esto es, asumamos que $P(k)$ es divisible por 9.

Para $n=k+1$ tenemos que

$$\begin{aligned} P(k+1)-P(k) &= 2^{2(k+1)}-3(k+1)-1-(2^{2k}-3k-1) \\ &= 2^{2k}\cdot 2^2-3k-1-2^{2k}+3k+1 \\ &= 2^{2k}\cdot 3-3 \\ &= 3(2^k-1) \end{aligned}$$

Notemos que $2^{2k}-1=4^k-1=(3+1)^k-1$. Aplicando el binomio de Newton se obtiene que

$$(3+1)^k-1=3^k+3^{n-1}\binom{n-1}{1}+\ldots+3\binom{n}{n-1}+1-1=3l.$$

Además $P(k+1) - P(k) = 3 \cdot 3l = 9l$. Luego se obtiene lo pedido puesto que $P(k+1) = P(k) + 9l$ y $P(k)$ es divisible por 9.

Problema VI.15. Muestre que $n^n \geq 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$.

Solución. La media aritmética de n números reales positivos $a_1, \ldots, a_n$, $(a_1 + \ldots + a_n)/n$ es mayor o igual que su media geométrica $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$.

Consideremos los $2n-1$ números: $a_1 = 1$, $a_2 = 3, \ldots, a_n = 2n-1$. Entonces la siguiente desigualdad se satisface:

$$\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n} \geq \sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}.$$

Por otra parte $1+3+\ldots+(2n-1) = \frac{1}{2}n(1+(2n-1)) = n^2$. Por lo tanto se obtiene que

$$n = \frac{n^2}{n} = \frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n} \geq \sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}\,.$$

Ahora es inmediato que $n^n \geq 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$.

Problema VI.16. ¿ Cuántos números entre 1 y 6500 pueden ser escritos como suma de dos o más potencias de distintas de 5 ?

Solución. Se tiene que $5^5 = 3.125$ y $5^6 =$ 15.625 > 6500. Luego los números buscados son de la forma:

$$a_0 5^0 + a_1 5^1 + a_2 5^2 + \ldots + a_5 5^5$$

donde para $i = 1, 2 \ldots, 5$ los números a_i son 0 o 1.

Como cada coeficiente a_i puede asumir dos valores tenemos 2^6 posibilidades. Ahora, como deben ser dos o más potencias distintas de 5 descartamos las posibilidades

$$a_i = 1 \;\text{ y }\; a_j = 0 \quad i \neq j \qquad (\text{ son 6 posibilidades})$$

y tambien la posibilidad

$$a_i = 0 \quad i = 0, 1, \ldots, 5 \qquad (\text{ es 1 posibilidad })$$

De aquí se obtiene que hay $2^6 - 6 - 1 = 57$ posibilidades

Problema VI.17. Sea $\{x_n\}_n$ la sucesión definida por $x_1 = x_2 = 1$ y $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ para $n \geq 2$. Pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_{n+2}.$$

Solución. Primero, para $n = 1$ se tiene que $x_1 = x_3 - 1 = 2 - 1 = 1$. Por lo tanto la igualdad es válida para este caso.

Supongamos que la igualdad anterior es cierta para $n \geq 2$. Vamos a probar que ella sigue siendo válida para $n+1$. Es decir, supongamos que $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_{n+2} - 1$ ..

Para $n+1$ términos se tiene la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}\,.$$

Por lo tanto, aplicando la hipótesis de inducción, se obtiene que la afirmación es cierta para $n+1$ puesto que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} x_i &= x_{n+2} - 1 + x_{n+1} = (x_{n+1} + x_{n+2}) - 1\\ &= x_{n+3} - 1.\end{aligned}$$

Problema VI.18. Sea $\{x_n\}_n$ la sucesión definida en el problema anterior. Sea $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$. Pruebe que $x_n > \alpha^{n-2}$ para todo $n \geq 3$.

Solución. La proposición es cierta para $n = 3$ y $n = 4$ puesto que $\alpha < 2 = x_3$ y claramente $\alpha^2 = (3+\sqrt{5})/2 < 3 = x_4$.

Supongamos que $\alpha^{k-2} < x_k$ para $3 \leq k \leq n$. Como $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ es solución de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, se tiene que $\alpha^2 = \alpha + 1$. Por lo tanto,

$$\alpha^{n-1} = \alpha^2 \cdot \alpha^{n-3} = (\alpha+1)\alpha^{n-3} = \alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}.$$

Aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que

$$\alpha^{n-2} < x_n \quad \text{y} \quad \alpha^{n-3} < x_{n-1}$$

y de esta última igualdad se sigue que

$$\alpha^{n-1} = \alpha^{n-2} + \alpha^{n-3} < x_n + x_{n-1} = x_{n+1}$$

que corresponde a la proposición para $n+1$.

Problema VI.19. Se dan cinco puntos en el interior de un cuadrado de lado 2. Demuestre que entre ellos hay necesariamente dos puntos a distancia menor que $\sqrt{2}$.

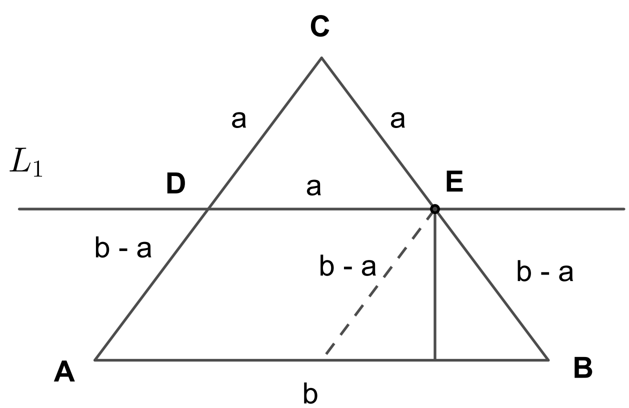
Solución. Se subdivide el cuadrado en cuatro cuadrados de lado 1. Uno de los cuatro cuadrados pequeños debe contener al menos dos de los cinco puntos. Obviamente estos dos puntos cumplen lo pedido.

Problema VI.20. Un reloj digital muestra las horas y minutos desde las 00:00 hasta las 23:59. Calcule el número de veces que aparecen simultáneamente en el visor los números 1,2,3 durante un día.

Solución. Se trata solamente de contar las horas posibles en que los dígitos pedidos aparecen, por ejemplo 01:23 y 23:12 etc.. El número total (98) se obtiene considerando que la primera posición sólo puede ser ocupada por los números 0, 1 y 2.

Problema VI.21. Una línea intersecta dos lados de un triángulo equilátero y es paralela al tercer lado. Si esta línea divide la región triangular en un trapezoide y un triángulo pequeño de modo que ambos tienen el mismo perímetro. ¿Cuál es la razón de las áreas del triángulo pequeño y del trapezoide?

Solución. Si L_1 es paralela a AB entonces el triángulo $\triangle DCE$ es siempre equilátero.



Llamemos a al lado del triángulo $\triangle DCE$ y b al lado del triángulo $\triangle ABC$. Entonces tenemos $a = \dfrac{3}{4}b$ (esta igualdad es una consecuencia simple de la igualdad de perímetros).

El área del triángulo $\triangle DCE$ es $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ y el área del trapezoide $DABE$ es

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(b-a) = \frac{\sqrt{3}(b^2-a^2)}{4}.$$

Luego la razón de las áreas del triángulo pequeño y del trapezoide es

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} : \frac{\sqrt{3}(b^2-a^2)}{4} = \frac{a^2}{b^2-a^2},$$

reemplazando $a = \dfrac{3}{4}b$, obtenemos

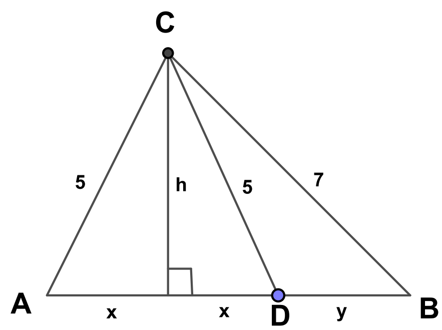
$$\frac{\frac{9b^2}{16}}{\frac{16b^2}{16} - \frac{9b^2}{16}} = \frac{\frac{9b^2}{16}}{\frac{7b^2}{16}} = \frac{9}{7}.$$

Por lo tanto, la razón entre las áreas del triángulo $\triangle DCE$ y el trapezoide $DABE$ es $9 : 7$, es decir,

$$\frac{\text{área}(\triangle DCE)}{9} = \frac{\text{área trapezoide } (DABE)}{7}\,.$$

Problema VI.22. En un triágulo ACB de base $AC = 9$ se elige un punto D en el lado AC de tal manera que $AB = BD = 5$. Supongamos que $BC = 7$. Encuentre la razón $AD : DC$.

Solución. Tracemos la altura del triángulo ABD. Ahora, trazamos la altura, y llamamos $2x$ a $\overline{AD}$ e y a $\overline{DC}$. (ver Figura) Tenemos que $2x + y = 9$



De la figura

$$x^2 + h^2 = 25\,, \qquad (x+y)^2 + h^2 = 49\,.$$

Como sabemos que $h^2 + x^2 = 25$, y que $x^2 + 2xy + y^2 + h^2 = 49$, se obtiene $2xy + y^2 = 24$, de donde $y(2x+y) = 24$.

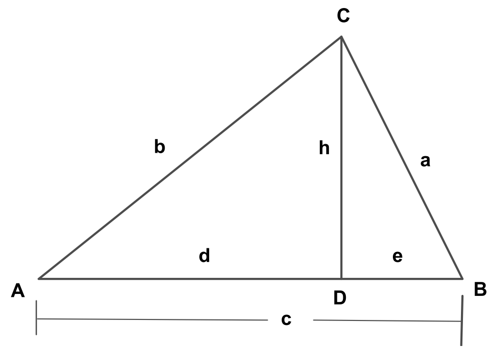
Puesto que $2x + y = 9$ tenemos $9y = 24$, $y = \dfrac{24}{9} = \dfrac{8}{3}$ y $2x = 9 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{19}{3}$.

Por lo tanto, la razón entre $2x = \overline{AD}$ e $y = \overline{DC}$ es $\dfrac{19}{3} : \dfrac{8}{3} = \dfrac{19}{8}$.

Problema VI.23. Las longitudes de los tres lados del triángulo ABC son números racionales. Si la altura CD corta al lado AB en dos partes AD y DB, demuestre que las longitudes AD y BD son números racionales.

Solución.

Observemos la figura siguiente:



Debemos probar que si a, b, $c \in \mathbb{Q}$ entonces $d\,, e \in \mathbb{Q}$.

Tenemos que $d = c - e$ y $e = c - d$ y por el Teorema de Pitágoras, $b^2 = d^2 + h^2$ y $a^2 = e^2 + h^2$. Ahora, en la expresión $a^2 = e^2 + h^2$ reemplazamos e por $c - d$ y obtenemos $a^2 = c^2 - 2cd + d^2 + h^2$, y reemplazando $d^2 + h^2$ por b^2 nos queda $a^2 = c^2 - 2cd + b^2$, de donde $2cd = c^2 + b^2 - a^2$ y de aquí

$$d = \frac{c}{2} + \frac{(b+a)(b-a)}{2c}\,.$$

En esta última expresión todos los números a, b y c son racionales, y sólo hay sumas, restas, multiplicaciones y divisiones en $\mathbb{Q}$, por lo tanto d es racional. Finalmente, como $e = c - d$, y c, d son racionales, se tiene que e es racional.

Problema VI.24. *Considere el conjunto de todos los triángulos de igual área, ¿cuál es el triángulo de menor perímetro?*

Solución. Se trata de un triángulo equilátero. En efecto, supongamos que existan dos lados, digamos AB y BC de longitudes distintas. Sea φ la recta que pasa por B y que es paralela al lado AC.

Sea D la intersección de la recta ν perpendicular a φ y que pasa por el punto medio del lado AC. El triángulo $\triangle ADC$ tiene perímetro menor que el triángulo $\triangle ABC$ (hay que probarlo), y ambos triángulos tienen la misma área, lo cual no puede ser. Luego, todos los lados del triángulos tienen igual longitud.

Capítulo VII

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema VII.1. Determine todas las soluciones enteras de la ecuación

$$x^2 + 15^a = 2^b,$$

con a , b números enteros.

Problema VII.2. Exprese el número 1988 como suma de números enteros positivos tal que el producto de ellos sea lo máximo posible.

Problema VII.3. Calcule el menor número impar n tal que

$$2^{1/7} \cdot 2^{3/7} \cdot \ldots \cdot 2^{(2n+1)/7} \geq 10^3.$$

Problema VII.4. Demuestre que la cantidad de soluciones de la ecuación

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1983}$$

con x , y , z números enteros es finito.

Problema VII.5. Pruebe que la fracción $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ es irreducible para n número natural.

Problema VII.6. Olimpíada Mundial, 1987.
Determine un par de números enteros positivos a y b tales que

i) $ab(a+b)$ no es divisible por 7.
ii) $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ es divisible por 7.

Problema VII.7. Un entero de la forma $4^a(8b+7)$, con a y b enteros no negativos, no puede ser una suma de tres cuadrados.

Problema VII.8. Determine todos los números enteros positivos n para los cuales $2^n - 1$ es divisible por 7. Demuestre que no existen números enteros positivos n para los cuales $2^n + 1$ es divisible por 7.

Problema VII.9. Encuentre todos los números naturales x tales que el producto de sus dígitos (en notación decimal) es igual a $x^2 - 10x - 22$.

Problema VII.10. Considere k un entero positivo tal que $\frac{k(k+1)}{3}$ es un cuadrado perfecto. Demuestre que $\frac{k}{3}$ y $(k+1)$ son cuadrados perfectos.

Problema VII.11. Una función f definida en el conjunto de los números enteros es tal que $f(z) = z - 10$ si $z > 100$ y $f(z) = f(z+11)$ si $z \leq 100$. Determine el conjunto de valores de la función f, es decir su recorrido.

Problema VII.12. Pruebe que hay una infinidad de pares de números naturales x, y que satisfacen la ecuación

$$2x^2 - 3x - 3y^2 - y + 1 = 0.$$

Problema VII.13. Muestre que la ecuación $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ tiene soluciones que son números enteros positivos.

Problema VII.14. Se forman los números que resultan de repetir sucesivamente 1988: 1988, 19881988, 198819881988, etc. ¿ En qué etapa aparece por primera vez un múltiplo de 126?

Problema VII.15. Considere los conjuntos de n números naturales diferentes de cero en los cuales no hay tres elementos en progresión aritmética. Demuestre que en uno de esos conjuntos la suma de los inversos de sus elementos es máxima.

Problema VII.16. Determine todos los pares de números racionales que son solución de la ecuación $x^{1988} + y^{1988} = x^{1987} + y^{1987}$.

Problema VII.17. Encuentre todos los números enteros a , b tales que

$$a^2 + b^2 = 1989.$$

Problema VII.18. Se sabe que el número $2xy89$ es el cuadrado de un número natural. Encuentre los dígitos x e y.

Problema VII.19. Se fija p un entero positivo. Determine enteros positivos m y n tales que

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}.$$

Problema VII.20. Determine si es primo el número z dado por

$$z = 10^{21} + 1.$$

Problema VII.21. Olimpíada Mundial, 1977.
Considere a, b números enteros positivos. Dividiendo $(a^2 + b^2)$ por $(a + b)$ se obtiene que

$$a^2 + b^2 = q(a + b) + r.$$

Encuentre todas las parejas (a, b) tales que $q^2 + r = 1977$.

Problema VII.22. Muestre que para cualquier número natural n la expresión $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ es divisible por 5 si y sólo si n no es divisible por 4.

Problema VII.23. Calcule el máximo común divisor de los números $10^n - 1$ y $10^m - 1$, donde m y n son números enteros positivos.

Problema VII.24. Calcule la suma siguiente

$$(1 \cdot 1000) + (2 \cdot 999) + \cdots + (999 \cdot 2) + (1000 \cdot 1).$$

Problema VII.25. Demuestre que la ecuación $x^5 + x = 10$ no posee raíces que sean números racionales.

Problema VII.26. Considere todos los números entre 0 y 1, de nueve cifras decimales en los que aparecen los dígitos 1,2,3, ..., 9 una y sólo una vez. Calcule la suma de estos números.

Problema VII.27. Suponga que m y n son números enteros positivos con la propiedad de que la cantidad de primos (distintos) que los divide es k. Pruebe que

$$m + n \geq 2^{k+1}.$$

Problema VII.28. Se construye el número entero 123456789101112131415 .... Calcule el dígito que se encuentra en la posición 2018.

Problema VII.29. Pruebe que existe un número entero positivo N tal que para todo número entero positivo $n \geq N$ se tiene que

$$\frac{k(n)}{n} \leq \frac{1}{1993}$$

donde $k(n)$ representa la cantidad de números primos diferentes que dividen a n .

Problema VII.30. Considere el número entero a_n cuya expresión decimal está formada por n unos, es decir $a_n = 111\ldots1$. Pruebe que si a_n representa un número primo entonces n es un número primo.

Problema VII.31. Para cada número entero positivo, considere a_n el último dígito del número

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Calcule el número $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{1992}$.

Problema VII.32. Para cada n número natural considere la expresión S_n definida por

$$S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n.$$

Calcule el valor de $S_{57} + S_{69} - S_{60}$.

Problema VII.33. VI Olimpíada Iberoamericana, 1991.
Sea F una función creciente definida para todo x número real con $0 \leq x \leq 1$ y tal que ella satisface las siguientes propiedades:

a) $F(0) = 0$
b) $F(\frac{x}{3}) = \frac{F(x)}{2}$
c) $F(1 - x) = 1 - F(x)$.

Encuentre $F(\frac{18}{1991})$.

Problema VII.34. Considere n un entero mayor que seis y $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_k$ todos los números naturales menores que n que son relativamente primos con n . Pruebe que si

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0\,,$$

entonces n es un número primo o una potencia entera de 2.

Problema VII.35. Encuentre todos los pares de enteros positivos a, b tales que el mínimo común múltiplo de a y b sea igual a 80.

Problema VII.36. Si $x_{k+1} = x_k + 1/2$ para $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ y $x_1 = 1$, encuentre $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

Problema VII.37. Sea $x_1 \in \mathbb{R}$, defina una sucesión $x_2, x_3, \ldots$ como sigue:

$$x_{n+1} = x_n(x_n + \frac{1}{n}), \quad n \geq 1$$

Pruebe que existe un único x_1 para el cual $0 < x_n < x_{n+1} < 1$.

Problema VII.38. Para cada $n \in \mathbb{N}$, evalue la suma

$$\sum_{k=0}^{N} \left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right]$$

donde $[x]$ es la parte entera de x.

Problema VII.39. Considere f una función real a valores reales. Suponga que para alguna constante positiva a la ecuación:

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$$

se satisface para todo número real x.

(a) Pruebe que f es periódica, es decir, existe una constante $p \neq 0$ tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo número real x.
(b) Para $a = 1$, de un ejemplo de una función que satisface las propiedades anteriores.

Problema VII.40. Encuentre el conjunto de todos los enteros positivos n con la propiedad que el conjunto $\{n\,,\, n+1\,,\, n+2\,,\, n+3\,,\, n+4\,,\, n+5\}$ puede ser particionado en dos subconjuntos tal que, el producto de los números en un conjunto es igual al producto de los números en el otro conjunto.

Problema VII.41. Pruebe que el conjunto de los números enteros de la forma $2^k - 3$, $k = 1, 2, \ldots$ contiene un subconjunto infinito en el cual cada par de números en este subconjunto son coprimos.

Problema VII.42. Considere m y n dos números enteros no negativos arbitrarios. Pruebe que

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

es un entero.

Problema VII.43. Sea G el conjunto de funciones no constantes en la variable real x, de la forma

$$f(x) = ax + b$$

donde a y b son números reales.

Suponga que G tiene las siguientes propiedades:

a) Si f y g pertencen G, entonces la función compuesta $f \circ g$ también pertenece a G;
b) Si f pertenece a G, entonces su función inversa $f^{-1}(x) = (x - b)/a$ tambien pertenece a G;
c) Para cada f en G existe un número real x_f tal que $f(x_f) = x_f$.

Pruebe que existe un número real k tal que $f(k) = k$ para todo f en G.

Problema VII.44. Cuando 4444^{4444} es escrito en notación decimal, la suma de sus dígitos es igual a A. Sea B la suma de los dígitos de A. Encuentre la suma de los dígitos de B. (A y B se supone escritos en notación decimal).

Problema VII.45. Sea f una función con dominio y recorrido el conjunto de los números naturales. Pruebe que si

$$f(n+1) > f(f(n))$$

para todo número natural n, entonces $f(n) = n$ para cada n.

Problema VII.46. El conjunto de todos los números naturales es la unión de dos subconjuntos disjuntos no vacíos: $\{f(1)\,,\, f(2)\,, \ldots,\, f(n)\,, \ldots\}$ y $\{g(1)\,,\, g(2)\,,\, \ldots,\, g(n)\,, \ldots\}$, donde

$$f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots$$
$$g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots$$

y $g(n) = f(f(n)) + 1$ para todo $n \geq 1$. Calcule $f(240)$.

Problema VII.47. Calcule el valor máximo de m^2+n^2, donde m y n son enteros positivos, con $n\,,\, m$ elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 1981\}$ y tal que $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$

Problema VII.48. Sea f una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos y cuyo recorrido es el conjunto de los enteros no-negativos. Si para todo $n\,,\, m$ en el dominio de f se tiene

$$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \text{ ó } 1$$
$$f(2) = 0\,,\; f(3) > 0 \;\text{ y }\; f(9999) = 3333.$$

Determine $f(1982)$.

Problema VII.49. ¿ Es posible elegir 1983 enteros positivos, todos menores o iguales que 10^5, de modo que no existan tres términos consecutivos en progresión aritmética? Justifique su respuesta.

Problema VII.50. Sean $x\,,\, y\,,\, z$ tres números reales positivos, tales que $x + y + z = 1$. Pruebe que

$$0 \leq yz + zx + xy - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

Problema VII.51. Dado un conjunto M formado por 1985 enteros positivos distintos, ninguno de los cuales tiene un divisor primo mayor que 26. Pruebe que M contiene al menos un subconjunto formado por cuatro elementos distintos cuyo producto es la cuarta potencia de un número entero.

Problema VII.52. Pruebe que no existen funciones definidas sobre el conjunto de los enteros no-negativos y tomando valores sobre este mismo conjunto, tales que $f(f(n)) = n + 1987$ para todo n.

Problema VII.53. Considere f una función definida en el conjunto de los números entero positivos. Suponga que f satisface las siguientes condiciones:

(i) $f(1) = 1\,,\ f(3) = 3\,,$
(ii) $f(2n) = f(n)$
(iii) $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)\,,$
(iv) $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)\,.$

Encuentre todos los valores de n, $1 \leq n \leq 1992$ tal que $f(n) = n$.

Problema VII.54. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida recursivamente como sigue:

$$f(1) = 1\,, \quad f(n+1) = 2f(n)\,, \quad n \geq 1$$

Encuentre la expresión de f.

Problema VII.55. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida recursivamente como sigue

$$f(1) = 1\,, \quad f(2) = 5\,, \qquad \text{y para} \quad n > 2 \quad f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$$

Pruebe que $f(n) = 2^n + (-1)^n$.

Problema VII.56. Considere p un número entero mayor que uno. Calcule la expansión en base p del número $1/(p-1)^2$

Problema VII.57. Sea N un número natural arbitrario. Suponga que N esta escrito en base 10 como sigue:

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0.$$

Suponga que $(-1)^n a_n + (-1)^{n-1} + \ldots + a_2 - a_1 + a_0$ es divisible por 11.

Pruebe que N es divisible por 11. Encuentre otras reglas de divisibilidad análogas a la anterior.

Problema VII.58. Dados números reales positivos a, b y c. Pruebe que la siguiente desigualdad es válida,

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c\,.$$

Pruebe además que si $a+b+c = 6$ entonces $a^2+b^2+c^2 \geq 12$.

Problema VII.59. Para cada número natural $n > 2$ defina la sucesión $\{S_n\}_n$ como

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Sean a y b números reales, tales que $an = 1$ y $b(n-1) = -1$. Pruebe que

$$n(n+1)^a - n < S_n < n - (n-1)n^b$$

Problema VII.60. Para $n = 0, 1, \ldots$ defina una función f como

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{y} \quad f(n+2) = 4^{n+2} f(n+1) - 16^{n+1} f(n) + n2^{n^2}.$$

Determinar para qué valores de n, $f(n)$ es divisible por 5.

Problema VII.61. Sea n un número natural mayor o igual que 3. Pruebe que $n^5 - 5n + 4n$ es divisible por 5! $(5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$.

Problema VII.62. Para números naturales, defina una función f_1 por

$$f_1(k) = \text{ suma de los cuadrados de los dígitos de } k.$$

Por ejemplo $f_1(3) = 9$, $f_1(135) = 1^2 + 3^2 + 5^2 = 35$.

Para $n \geq 1$ defina f_{n+1} recursivamente por

$$f_{n+1}(k) = f_1(f_n(k)).$$

Calcule $f_{1992}(1991)$. Encuentre una fórmula para f_n, $n \geq 2$.

Problema VII.63. Sea n un número natural no primo y sea $p > 1$ un factor primo de n. Encuentre la representación binaria del menor número natural N tal que

$$\frac{(1 + 2^p + 2^{n-p})N - 1}{2^n}$$

sea un entero.

Problema VII.64. Olimpíada Cono Sur, 1991 Dado un número natural $n \geq 1$, sea $f(n)$ el promedio de todos sus divisores positivos. Por ejemplo:

$$f(3) = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{y} \quad f(12) = \frac{1+2+3+4+6+12}{6} = \frac{14}{3}.$$

i) Demuestre que

$$\sqrt{n} \leq f(n) \leq \frac{n+1}{2}.$$

ii) Encuentre todos los números naturales n para los cuales

$$f(n) = \frac{91}{9}.$$

Problema VII.65. Un cubo de madera de 4 cm. de lado está pintado en toda su superficie exterior de color azul . Realizando cortes horizontales y verticales se obtiene 64 cubitos de 1 cm. de lado. Determinar el número de cubitos que tienen , respectivamente, $3, 2, 1, 0$ caras azules.

Problema VII.66. Encuentre todos los triángulos rectángulos que tienen un cateto y la hipotenusa con longitudes enteras, sabiendo que la longitud del otro cateto es igual a la raíz cuadrada de 1989.

Problema VII.67. La longitud de cada uno de los lados de un triángulo equilátero es cinco. Desde un punto interior del triángulo se trazan segmentos perpendiculares a cada uno de los tres lados. Si las longitudes de los segmentos son a, b, c , determine $a + b + c$.

Problema VII.68. Encuentre las soluciones de la ecuación

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$$

Las raíces son todas positivas.

Problema VII.69. En un triángulo ABC se escoge un punto P en el lado AB de modo que P quede más cerca de A que de B . Se construyen luego tres puntos Q, R, S en AC, CB, BA respectivamente de manera que PQ es paralelo a BC, QR es paralelo a AB, RS es paralelo a CA. Calcule el valor máximo del área del cuadrilátero $PQRS$, en términos del área del triángulo dado.

Problema VII.70. Las longitudes de los tres lados del triángulo ABC son números racionales. Si la altura CD corta al lado AB en dos partes AD y DB demuestre que las longitudes AD y DB son números racionales.

Problema VII.71. Se tiene un rectángulo de lados enteros m, n respectivamente, subdividido naturalmente en mn cuadraditos de lado 1. Encontrar el número de cuadraditos que atraviesa una diagonal del rectángulo (sin considerar aquellos que son tocados sólo en un vértice).

Problema VII.72. En el cuadrado $ABCD$ el punto interior E y el punto exterior F son tales que ABE y BCF son triángulos equiláteros. Demuestre que D , E y F son colineales.

Problema VII.73. La bóveda de un Banco tiene N cerraduras que deben ser operadas simultáneamente para abrirla. Cinco ejecutivos tienen algunas de las llaves, de tal manera que cualquiera tres de ellos pueden abrir la bóveda; pero ningún par puede hacerlo. Determinar el menor valor de N.

Problema VII.74. Las longitudes de los tres lados del triángulo ABC son números racionales. Si la altura CD corta al lado AB en dos partes AD y DB demuestre que las longitudes AD y DB son números racionales.

Problema VII.75. Para los números enteros $n = 0, 1, 2, \ldots$ se define $f(n)$ por las relaciones

i): $f(0) = 2$
ii): $(\,f(n+1) - 1\,)^2 + (\,f(n) - 1\,)^2 = 2\,f(n)\,f(n+1) + 4$

tomando $f(n)$ el mayor valor posible. Calcule $f(n)$.

Problema VII.76. En una antigua comarca habitaban 3 sabios; como no siempre coincidían en sus consejos al Rey, éste decidió quedarse con el más sabio de los tres, matando a los otros. Para decidir cuál de ellos se salvaría, realizó la siguiente prueba:
Le puso a cada sabio un sombrero, sin que éste viera su color, los encerró en una habitación común y les dijo:

1. Sólo salvará su vida el primero en adivinar el color de su propio sombrero.
2. En total se dispone de 5 sombreros, de los cuales 3 son blancos y 2 son rojos.
3. No pueden comunicarse entre ustedes pero pueden mirarse unos a otros.

Después de un buen rato, uno de los sabios dijo "yo sé el color de mi sombrero". Determine el color que tenía y cómo lo dedujo. Deduzca el color de los otros sombreros usados.

Problema VII.77. Sean x, y, z números reales positivos. Demuestre que
$$\frac{x^4 + y^4 + z^4}{x + y + z} \geq xyz\,.$$

Problema VII.78. *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, definida recursivamente como sigue*
$$f(1) = 1,\ f(n+1) = 2f(n)\,,\ \ n \geq 1\,.$$
Encuentre la expresión de f*.*

Problema VII.79. *Sean* P *y* Q *dos puntos en el mismo semiplano determinado por una recta* φ *en el plano. Pruebe que la curva* γ *de menor longitud que une* P *y* Q*, y que toca a* φ*, está formada por los segmentos de recta* $\vec{AP}$ *y* $\vec{AQ}$*, donde* $A \in \varphi$ *es tal que los ángulos* $\angle PAN$ *y* $\angle NAQ$ *son iguales, y* $\vec{AN}$ *es la semi-recta perpendicular a* φ *que está en el mismo semiplano que* P *y* Q*.*

Problema VII.80. *Considere* x, y, z *números reales positivos. Pruebe que*
$$(x+y)(x+z) \geq 2\,\sqrt{xyz(x+y+z)}\,.$$

Capítulo VIII

Fáciles de enunciar y difíciles de resolver

A continuación presentamos algunos problemas que como dice el título, son fáciles de describir pero sus respuestas no son aún conocidas.

Problema VIII.1. (Conjetura de los números capícuas).
Se dice que un entero positivo es capícua si al ser leido de derecha a izquierda y en orden reverso, se lee el mismo número. Por ejemplo, 121 es capícua.

Un proceso para obtener números capícuas es el siguiente: dado un entero positivo n, le sumamos a este el número formado por sus dígitos escritos en orden reverso. Continuamos el proceso con el número resultante hasta obtener un números capícua.

Se afirma que cada entero positivo al aplicarle el proceso anterior produce, eventualmente, un número capícua.

Es sencillo verificar empíricamente la afirmación para cualquier número, sin embargo a la fecha no se conoce una demostración.

Problema VIII.2. (Problema $3x + 1$).
Comenzando con cualquier número entero positivo, si es par divídalo por 2, si es impar multiplíquelo por 3 y sume 1 al resultado.

Repita el proceso con el número resultante en ambas posibilidades. Por ejemplo, comenzando con 17 obtenemos la siguiente sucesión de números:

$$\begin{aligned}
&17 \longrightarrow 3 \cdot 17 + 1 = 52 \longrightarrow 52/2 = 26 \longrightarrow 26/2 = 13 \longrightarrow \\
&3 \cdot 13 + 1 = 40 \longrightarrow 40/2 = 20 \longrightarrow 20/2 = 10 \longrightarrow 10/2 = 5 \\
&\longrightarrow 3 \cdot 5 + 1 = 16 \longrightarrow 16/2 = 8 \longrightarrow 8/2 = 4 \longrightarrow 4/2 = 2 \\
&\longrightarrow 2/2 = 1
\end{aligned}$$

El Problema $3x + 1$ asegura que cualquier número entero positivo produce una sucesión que eventualmente termina en $4, 2,$ ó 1. Mediante el uso de computadores se ha ratificado este resultado para números grandes, pero no existe aún una demostración de la validez de esta afirmación.

Examine el problema comenzando con $5, 6, 7, 8$. ¿ Cuántas iteraciones son necesarias para obtener un 1, un 2 o un 4 al final del proceso iterativo descrito arriba?

Problema VIII.3. (Brocard) ¿ Cuándo $n! + 1$ es un cuadrado perfecto?

Por ejemplo

$$1!+1=2 \quad (\text{no}), \qquad 2!+1=3 \quad (\text{no}), \qquad 3!+1=7 \quad (\text{no})$$

$$4!+1=25=5^2 \quad (\text{si}), \quad 5!+1=(11)^2 \quad (\text{si}), \quad 6!+1=721 \quad (\text{no}),$$

$$7!+1=(71)^2 \quad (\text{si}), \ldots$$

Los valores $n=4,5$ y 7 son los únicos conocidos al momento. No hay una demostación que no hay más.

Problema VIII.4. ¿ Es posible resolver la ecuación $x^3+y^3+z^3=30$ en el conjunto de los números enteros ?

Problema VIII.5. ¿Es posible encontrar una caja cuyos lados y diagonales son todos números enteros?

Problema VIII.6. Los números de Fermat son definidos por la fórmula de recurrencia $F_n = 2^{2^n}+1$. Por ejemplo, $F_0=3$, $F_1=5$, $F_2=17$, $F_3=257$, y $F_4=65537$. En 1640 Fermat escribió una carta a Mersenne en la cual afirmaba que la fórmula anterior producía sólo números primos, pero en 1732 Euler mostró que

$$F_5 = 2^{32}+1 = 4.294.967.297 \ = 641 \cdot 6.700.417\,.$$

luego F_5 es un número compuesto.

En 1880 Landry probó que

$$F_6 = 2^{64}+1 = 274.177 \cdot \ 67.280.421.310.721\,.$$

por lo tanto también es compuesto.

En 1953 J.L. Selfridge probó que F_{16} es compuesto. Se puede averiguar en la actualidad cuáles son los últimos descubiertos. ¿ Existen infinitos números de Fermat compuestos?

Problema VIII.7. En la actualidad son conocidos sólo tres números primos de la forma n^n+1. Ellos son $1^1+1=2$, $2^2+1=5$, y $4^4+1=257$.

La pregunta natural que surge es: ¿ Existen más número primos de la forma n^n+1? Lo que se sabe al momento, es que si existen otros, ellos deben tener más de 300.000 dígitos.

Problema VIII.8. ¿Existen infinitos números primos de la forma $n!+1$? Por ejemplo $1!+1=2$, $2!+1=3$, $3!+1=7$. Encuentre otros.

Problema VIII.9. La sucesión de números de Fibonacci es definida por la fórmula de recurrencia siguiente:

$$f_1=f_2=1\,, \quad f_{n+1}=f_n+f_{n-1}\,, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Así, sus primeros términos son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ..., y vemos que entre ellos hay varios que son números primos, y nos podemos preguntar ¿La sucesión de Fibonacci contiene infinitos números primos?

Problema VIII.10. Sea $f(n) = \sigma(n) - n$, donde $\sigma(n)$ denota la suma de los divisores de n. Por ejemplo, $f(6) = 6$ pues los divisores de 6 son 1, 2, 3 y 6; también $f(25) = 6$, pues los divisores de 25 son $1, 5$ y 25, finalmente $f(95) = 25$, pues los divisores de 95 son 1, 5, 19 y 95, por lo tanto tenemos $f(95) = 25, \quad f(25) = 6 \quad \text{y} \quad f(6) = 6,$

Conjetura de Catalán. La sucesión infinita n, $f(n)$, $f(f(n))$, $f(f(f(n))), \ldots,$ de consecutivos iterados de f es finalmente periódica, es decir, después de un cierto número de veces de aplicar el proceso f a un número, se repite el ciclo de los valores obtenidos.

Problema VIII.11. ¿Existen infinitos primos, cada uno de ellos siendo la suma de dos cuadrados consecutivos? . Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 5 &= 1^2 + 2^2 \\ 13 &= 2^2 + 3^2 \\ 41 &= 4^2 + 5^2 \\ 61 &= 5^2 + 6^2 \end{aligned}$$

Problema VIII.12. **Conjetura de Sierpinski**.

Si los números, $1, 2, 3, \ldots, n^2$, con $n > 1$ son ordenados en n filas, cada una conteniendo n números

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2 \end{array}$$

entonces cada fila contiene al menos un número primo. No se conoce una prueba de esta afirmación.

Problema VIII.13. **Postulado de Bertrand.**

Para cada número natural $n > 1$ existe al menos un número primo entre n y $2n$.

a) Entre los cuadrados de cualquiera dos números naturales consecutivos existen al menos dos números primos. Ejemplos, para $n = 1$ tenemos $1, 2, 3, 4$.
Para $n = 2$ nos queda 4, 5, 6, 7, 8, 9 y para $n = 3$ se tiene 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

b) Entre los cubos de dos números naturales consecutivos existen al menos dos números primos.

c) Si los números naturales son ordenados en filas de modo que la fila n–ésima contiene n números naturales consecutivos

$$\begin{array}{llllll} \text{fila } 1 & 1 & & & & \\ \text{fila } 2 & 2 & 3 & & & \\ \text{fila } 3 & 4 & 5 & 6 & & \\ \text{fila } 4 & 7 & 8 & 9 & 10 & \\ \text{fila } 5 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Entonces cada fila, excepto la primera, contiene un número primo. En otras palabras, entre cada dos números triangulares, es decir, número enteros positivos de la forma $\dfrac{n(n+1)}{2}$, cualquiera existe al menos un número primo.

Problema VIII.14. Recordemos que los números primos son los bloques fundamentales desde los cuales todos los números naturales pueden ser construidos: "Cada número entero positivo mayor que 1 puede ser escrito como un producto de potencias de primos, y, salvo el orden de los factores, de manera única". Este resultado es el contenido del Teorema Fundamental de la aritmética. Es razonable preguntarse por la suma de números primos, por ejemplo, ¿qué números pueden ser obtenidos como suma de dos números primos impares? Es obvio que la suma de dos números impares es un número par, y *Goldbach* propuso, en base a la evidencia empírica, que cada número mayor que 4 puede ser representado de esta forma. Por ejemplo,

$$6 = 3+3, \quad 8 = 3+5, \quad 10 = 5+5, \quad 12 = 5+7,$$
$$14 = 7+7 = 3+11, \quad 16 = 3+13, \ldots .$$

Mediante el uso de computador, se ha verificado esto hasta 20 billones, y no se han encontrado excepciones. Sin embargo, ninguna cantidad finita de evidencia es una prueba definitiva, la demostración o el contraejemplo siguen pendientes.

Problema VIII.15. **Galileo (1615)** En su trabajo sobre la caída libre de los cuerpos observó que:

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \cdots$$

¿Es posible construir otras fracciones con propiedades análogas a esta encontrada por Galileo?

BIBLIOGRAFÍA

- Matemática y Olimpíadas, Somachi; Santiago 1994
- ¿ De cuántas maneras? Combinatoria, N. Vilenkin; Editorial MIR, Moscú 1972
- An introduction to the theory of numbers, G. H. Hardy, E.M. Wright; Clarendon Press, Oxford 1960
- Introduction to analytic number theory, T. Apostol; Springer Verlag, New York 1976
- Lectures on elementary number theory, Hans Rademacher; Blaisdell Publishing Co., New York 1964
- History of the theory of numbers (3 Volúmenes), L.E. Dickson; Carnegie Institute, Washington 1923
- Modern elementary theory of numbers (3 Volúmenes), L.E. Dickson; The University of Chicago Press, Chicago 1939
- El hombre que calculaba, Malba Tahan
- Sitio Web Olimpiada Chile. www.olimpiadadematematica.cl
- Cuadernos de Olimpíadas de Matemáticas, de la Olimpíada Mexicana de Matemáticas. 10 tomos