Problema 1. Un canguro está jugando con su calculadora. Empieza en el número 12. Lo multiplica o divide por 2 o por 3 (si es posible) 60 veces. ¿Cuál de los siguientes números NO puede ser obtenido?

A) 12 B) 18 C) 36 D) 72 E) 108

Solución:

Es claro que si tenemos $2m$ veces el número dos y multiplicamos por 2 m veces y dividimos por 2 m veces, no importando el orden en que se multiplique y se divida, el resultado es 1, del mismo modo si tenemos $2n$ veces el número tres y multiplicamos por 3 n veces y dividimospor 3 n veces no importando el orden en que se multiplique y se divida, el resultado es 1.

Además, el número que obtiene el canguro es de la forma

$$12 \cot \frac{2^a 3^b}{2^c 3^d}, \;\; a+b+c+d=60$$

- Obtener 12 es posible, pues $12 = 12 \cdot 1$, quedandonos 60 números 2 o 3, y como 60 es par, podemos formar 1 con dichos números.
- Obtener 18 es posible, pues $18 = 12 \cdot 2^{-1} \cdot 3 \cdot 1$, quedandonos 58 números 2 o 3, y como 58 es par, podemos formar 1 con dichos números.
- Obtener 36 NO es posible, pues $36 = 12 \cdot 3$, quedandonos 59 números 2 o 3, y como 59 es impar, NO podemos formar 1 con dichos números.
- Obtener 72 es posible, pues $72 = 12 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1$, quedandonos 58 números 2 o 3, y como 58 es par, podemos formar 1 con dichos números.
- Obtener 108 es posible, pues $108 = 12 \cdot 3^2 \cdot 1$, quedandonos 58 números 2 o 3, y como 58 es par, podemos formar 1 con dichos números.

Problema 2. Dados 6 números naturales distintos, se forman dos números de tres dígitos ocupando los 6 números. La primera cifra del segundo número es el doble de la última cifra del primer número. ¿Cuál es el menor valor posible de la suma de los dos números?

Solución:

Si deseamos encontrar el menor valor posible de la suma, asumiremos que los 6 números distintos son $0, 1, 2, 3, 4, 5$, ocupando los menores en las centenas y los mayores en las unidades. Pero como la primera cifra del segundo número es el doble de la última cifra del primer número, nos conviene que la última cifra del primer número sea pequeña, luego el primer número debe comenzar en 1 y terminar en 2 para que el segundo número comience en 4 y termine en 5. Luego los números son 102 y 435, o bien, 132 y 405, obteniendo como resultado el número 537.

En el caso que no contemos el 0 en los naturales, asumiremos que los 6 números distintos son $1, 2, 3, 4, 5, 6$, obteniendo los números son 132 y 456, o bien, 152 y 436, obteniendo como resultado el número 588.

Problema 3. ¿Cuántos números enteros hay entre 3,17 y 20,16?

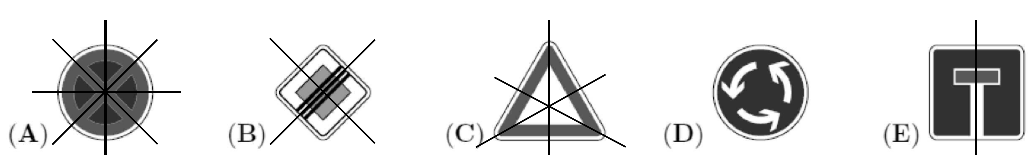
Solución:

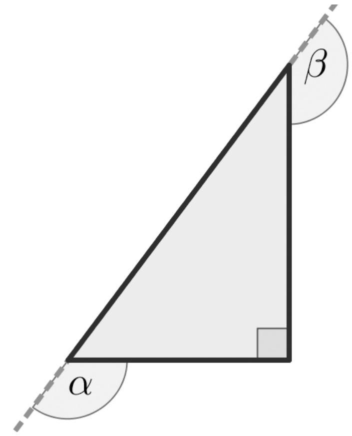
En dicho intervalo están los enteros desde 4 hasta 20, luego hay 17 enteros.

Problema 4. Cuál de las siguientes señales de tráfico tiene el mayor número de ejes de simetría?

Solución:

La primera señal tiene 4 ejes de simetría.





Problema 5. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos α y β marcados en la figura?

Solución:

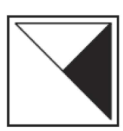
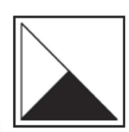
Notemos que en un triángulo la suma de los ángulos exteriores es $360°$, y como en un triángulo rectángulo uno de los ángulos exteriores en $90°$, la suma $\alpha + \beta = 270$.

Problema 6. Lorena tiene que sumar 26 a un cierto número. En vez de eso, le resta 26 y obtiene -14. ¿Qué número debería haber obtenido si lo hubiera hecho bien?

Solución:

Debería haber obtenido el número $-14 + 26 + 26 = 38$.

Problema 7. Juana voltea una carta por su borde inferior y luego repite esto por el borde lateral derecho, ¿Qué se ve al final?

(A) 
(B) 
(D) 
(E) 

Solución:

Problema 8. Un Canguro reúne 555 grupos de 9 piedras cada uno en un único montón. A continuación divide el montón resultante en montoncitos de 5 piedras cada uno. ¿Cuántos montoncitos obtiene?

Solución:

Obtiene $(555 \cdot 9) \div 5 = 999$.

Problema 9. En el periódico de la escuela se publicó que el 60 % de los profesores vienen a la escuela en bicicleta. Esos son 45 profesores. Sólo el 12 % de nuestros profesores vienen en automovil. Ese número es

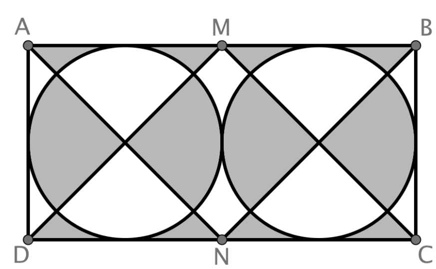
Solución:

El problema se resuelve utilizando la siguiente regla de tres:

$$60 \quad rightarrow 45 \text{ profesores}$$
$$12 \quad \rightarrow x \text{ profesores}$$

Luego, $x = \dfrac{45 \cdot 12}{60} = 9$ profesores.

Problema 10. El rectángulo $ABCD$ de la figura de área 10 cm^2, se dibujan dos circunferencias congruentes tangentes entre sí y tangentes a los lados. Calcule el área achurada.



Solución: Por congruencia, el área de sectores sombreados suman la mitad del área del rectángulo. Por lo tanto, el área sombreada es 5 cm^2.

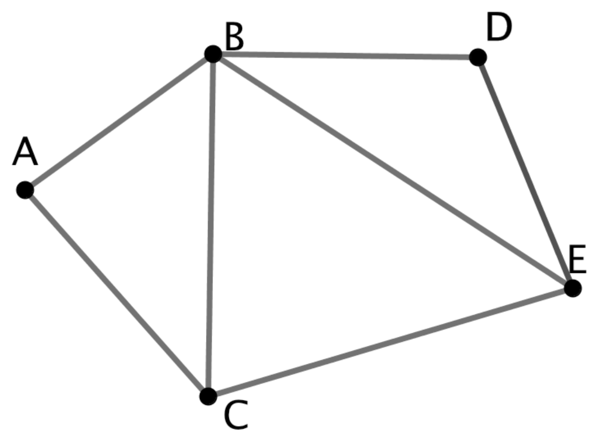
Problema 11. Dos trozos de cuerda miden 1m y 2m de longitud. Se cortan los dos trozos en varias partes, todas de la misma longitud. ¿Cuál de los siguientes NO puede ser el número total de partes que se obtienen?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 15

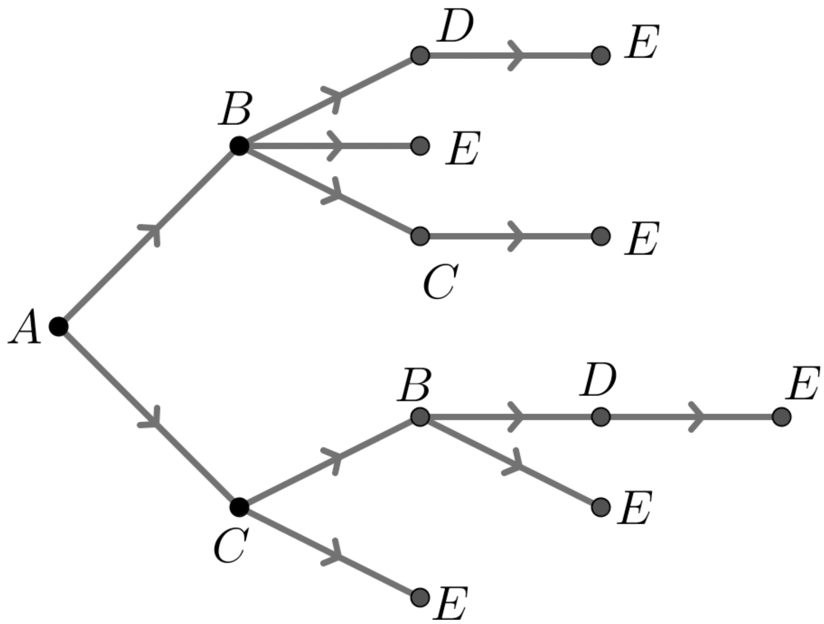
Solución:

Si se cortan los dos trozos en varias partes, todas de longitud k, se pueden obtener k partes del primer trozo y $2k$ partes del segundo trozo, luego el número total de partes que se obtienen son de la forma $k+2k = 3k$, es decir el numero total debe ser un múltiplo de 3, por lo tanto, 8 NO puede ser el número total de partes que se obtienen.

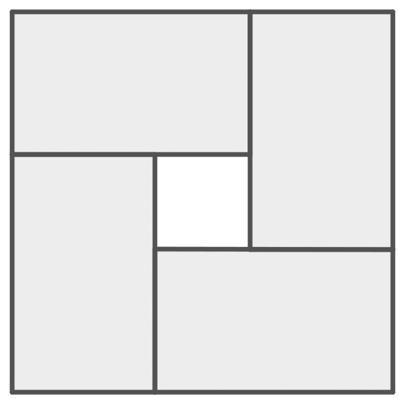
Problema 12. Cuatro ciudades, A, B, C y D están conectadas por carreteras, como se muestra en la figura. Una carrera empieza en A y termina en E. ¿Cuántas rutas posibles hay para el itinerario de la carrera?



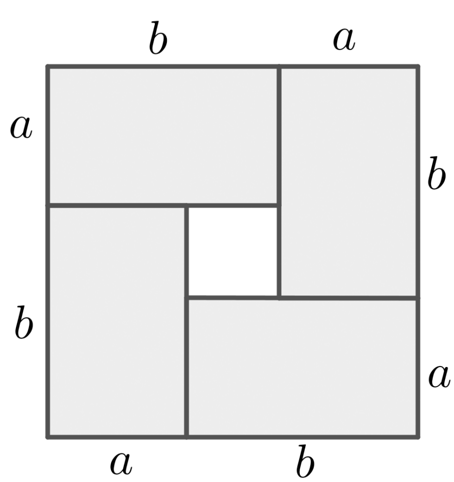
Solución: 6 rutas.



Problema 13. La figura muestra cuatro rectángulos iguales situados dentro de un cuadrado. El perímetro de cada rectángulo es 16 cm. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?



$\boxed{\text{Solución:}}$ Si el perímetro de cada rectánculo es 16, entonces, $2a+2b = 16$. Luego, el perímetro del cuadrado es $4a + 4b = 2 \cdot 16 = 32$.



Problema 14. Pedro tiene 49 bolas azules y 1 roja. Cuántas bolas debe retirar para que el 90 % de sus bolas sean azules?

$\boxed{\text{Solución:}}$

Pedro debe retirar 40 bolas azules, de modo que queden 9 azules y 1 roja. también, podemos pensar que 1 es el 10 % del total de las bolas, luego el 90 % es 9.

Problema 15. ¿Cuál de las siguientes fracciones tiene el valor más próximo a $\frac{1}{2}$?

A) $\frac{25}{79}$ B) $\frac{27}{59}$ C) $\frac{29}{57}$ D) $\frac{52}{79}$ E) $\frac{57}{92}$

$\boxed{\text{Solución:}}$

Notemos que un problema equivalente consiste en múltiplicar cada una de estas fracciones por 2 y buscar cual es mas cercana a 1, es decir, la fracción donde el numerador y el denominador sean lo más cercanos.

- $\frac{25}{79} \cdot 2 = \frac{50}{79}$
- $\frac{27}{59} \cdot 2 = \frac{54}{59}$
- $\frac{29}{57} \cdot 2 = \frac{58}{57}$
- $\frac{52}{79} \cdot 2 = \frac{104}{79}$
- $\frac{57}{92} \cdot 2 = \frac{114}{92}$

Luego como $\frac{58}{57}$ es cercano a 1, se tiene que $\frac{29}{57}$ es cercano a $\frac{1}{2}$.

Problema 16. Se escriben los resultados de los cuartos de final, las semifinales y la final de un torneo en el que no hay empates. Los resultados son (no necesariamente en este orden): B gana a A; C gana a D; G gana a H; G gana a C; C gana a B; E gana a F y G gana a E. ¿Qué pareja jugó la final?

Solución:

Como 8 equipos juegan en cuartos de final, 4 juegan en semifinal y 2 juegan en la final sabemos que el finalista jugó 3 partidos, es decir, A y G llegaron a la final, ganando G.

Problema 17. José, Juan y Jorge son trillizos. Sus hermanos Tomás y Tito son gemelos y son 3 años más jóvenes. ¿Cuál de los siguientes números puede ser la suma de las edades de los 5 hermanos?

A) 36 B) 53 C) 76 D) 89 E) 92

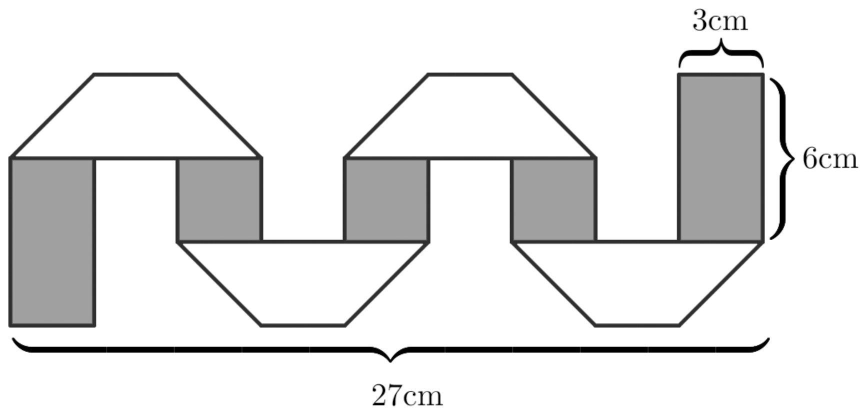
Solución:

Si n es la edad de los trillizos, $n-3$ es la edad de los gemelos, entonces, la suma de las 5 edades es $3n+2(n-3)=5n-6$. Luego:

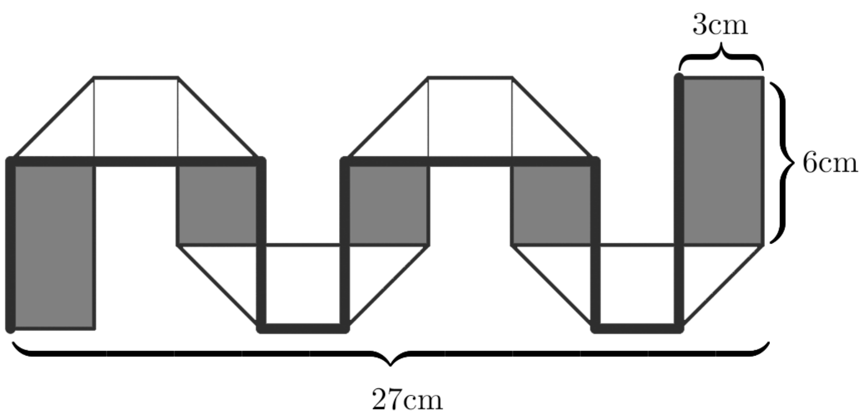
- $5n-6=36 \to n=\dfrac{42}{5}$
- $5n-6=53 \to n=\dfrac{59}{5}$
- $5n-6=76 \to n=\dfrac{82}{5}$
- $5n-6=89 \to n=\dfrac{95}{5}=19$

Luego, la suma de las edades de los 5 hermanos puede ser 89.

Problema 18. Una tira de papel, de 3 cm de ancho, es gris de un lado y blanca del otro. Se dobla la tira, como se muestra en la figura. Si los trapecios grises son iguales. ¿Cuál es la longitud de la tira original?. La figura sólo muestra la tira doblada, con las medidas parciales indicadas.



Solución:



Notemos que la línea gruesa marca unos de los bordes de la tira, luego, la línea mide $6 + 9 + 6 + 3 + 6 + 9 + 6 + 3 + 9 = 57$ cm.

Problema 19. Los canguros Eduardo y Joan empiezan a saltar al mismo tiempo, desde el mismo punto, y en la misma dirección. Dan un salto por segundo. Cada uno de los saltos de Eduardo es de 6 m de largo. El primer salto de Joan es de 1 metro de largo, el segundo 2 metros, el tercero 3 metros y así sucesivamente. ¿Después de cuántos saltos Joan alcanzará a Eduardo?

$\boxed{\text{Solución:}}$

Notemos que Eduardo al dar n saltos, avanza $6n$ metros, en cambio Joan al dar n saltos avanza $\dfrac{n(n+1)}{2}$ metros, por lo tanto ellos se encontraran cuando:

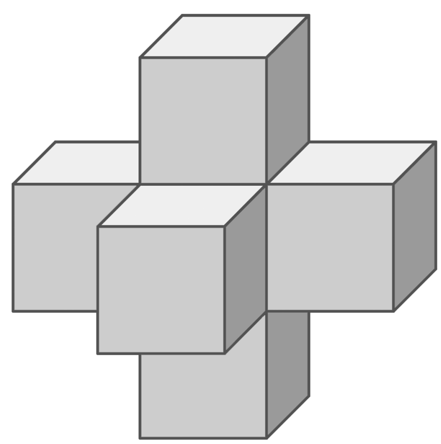
$$\begin{aligned} 6n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 12n &= n(n+1) \\ 12n &= n^2 + n \\ 0 &= n^2 - 11n \\ n(n-11) &= 0 \end{aligned}$$

Luego, se encuentran cuando $n = 0$ (en la partida) y cuando $n = 11$.

Mediante una tabla también podemos resolver el problemas contanto los metros que avanzan los canguros de la siguiente manera:

n° de saltos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Joan	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
Eduardo	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66

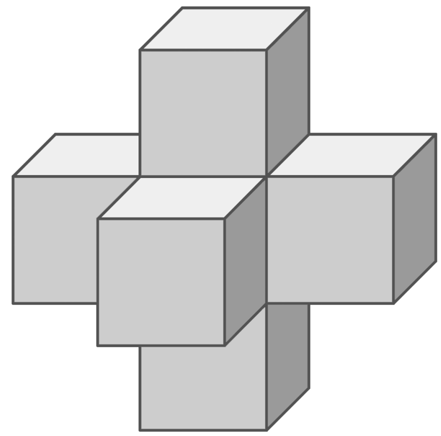
Problema 20. Siete dados se pegan juntos para formar el sólido de la figura: Las caras de los dados que se pegan juntas tienen el mismo número de puntos en ellas. ¿Cuántos puntos hay, en total, en la superficie del sólido?



$\boxed{\text{Solución:}}$

La suma de las cara de cada dado es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, luego la suma de las caras de los 6 dados que rodean el dado central es $6 \cdot 21 = 126$, y como cada dado tiene una de las caras pegada con otra del dado central, en total, en la superficie del sólido hay $126 - 21 = 105$ puntos.

Problema 21. En una clase hay 20 estudiantes. Se sientan de dos en dos de modo que exactamente un tercio de los chicos se sienta junto a una chica, y exactamente la mitad de las chicas se sienta junto a un chico. ¿Cuántos chicos hay en la clase?



Solución:

Como se sientan en parejas, y un tercio de los chicos se sienta junto a una chica, y la mitad de las chicas se sienta junto a un chico, se deduce que:

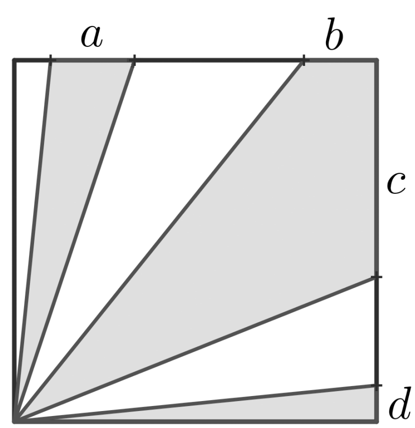
$$\frac{1}{3} \text{ de los chicos } = \frac{1}{2} \text{ de las chicas}$$

Es decir:

$$\frac{\text{número de chicos}}{\text{número de chicas}} = \frac{3}{2}$$

Y como en el curso hay 20 estudiantes se concluye que hay 12 chicos y 8 chicas.

Problema 22. Dentro de un cuadrado de área 36 hay regiones sombreadas como se muestra en la figura: El área sombreada total es 27. ¿Cuánto vale $a + b + c + d$?



Solución:

Como el cuadrado tiene área 36, su lado mide 6. Notemos que los triángulo de base a y d tienen altura 6, además la diagonal del cuadrado divide el cuadrilatero sombreado en dos triángulos de base c y b y altura 6. Luego, el área sombreada es:

$$
\begin{aligned}
a \cdot 62 + \frac{b \cdot 6}{2} + \frac{c \cdot 6}{2} + \frac{d \cdot 6}{2} &= 27 \\
6(a+b+c+d) &= 54 \\
a+b+c+d &= 9
\end{aligned}
$$

Problema 23. El reloj de Tamara va 10 minutos atrasado, pero ella cree que va 5 minutos adelantado. El reloj de Luisa va 5 minutos adelantado, pero ella cree que va 10 minutos atrasado. En el mismo momento, cada una de ellas mira su propio reloj. Tamara cree que son las 12h00. ¿Qué hora cree Luisa que es?

Solución:

Si Tamara cree que son las $12:00$ es porque su reloj marca las $12:05$ (pues cree que este está adelantado 5 minutos), pero el reloj está atrasado en 10 minutos, es decir son las $12:15$.

Si son las $12:15$ como el reloj de Luisa está adelantado 5 minutos, su reloj marca las $12:20$ pero ella cree que está atrasado 10 minutos. Luego cree que son las $12:30$.

Problema 24. Doce chicas se reúnen en un café. Como promedio se come cada una $1,5$ dulces. Ninguna de ellas come más de dos dulces y dos de ellas sólo beben agua mineral. ¿Cuántas chicas se comieron más de 2 dulces?

Solución:

Como en promedio comen $1,5$ dulces cada una, en total comieron $1,5 \cdot 12 = 18$ dulces ese día, pero como dos de ellas sólo beben agua mineral se deduce que entre 10 chicas comieron 18 dulces y como ninguna de ellas come más de dos dulces, entonces ocho de ellas comen 2 dulces cada una y dos de ellas comen solo un dulce.

Problema 25. Caperucita Roja lleva pasteles a las tres abuelitas. Lleva una cesta llena de pasteles. Inmediatamente antes de entrar en cada una de las casas de las abuelitas, el Lobo Feroz se come la mitad de los pasteles que hay en la cesta en ese momento. Cuando sale de la casa de la tercera abuela ya no quedan pasteles en la cesta. Le da el mismo número de pasteles a cada abuela. ¿Cuál de los siguientes números es seguro que divide al número inicial de pasteles que había en la cesta?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

Solución:

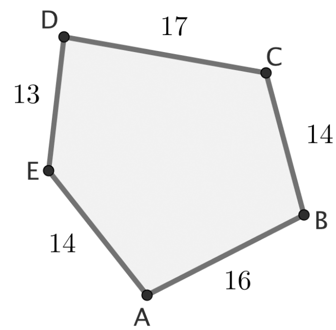
Supongamos que la Caperucita Roja le da k pasteles a cada una de sus abuelitas, entonces caperucita salió de la casa de su segunda abuelita con $2k$ pasteles, como le dejo k pasteles a la segunda abuelita, entonces entró a su casa con $3k$ pasteles. Por lo tanto, caperucita salió de la casa de su primera abuelita con $6k$ pasteles, como le dejo k pasteles a la segunda abuelita, entonces entró a su casa con $7k$ pasteles, concluyendo que el número inicial de pasteles es $14k$. Finalmente, 7 es seguro que divide al número inicial de pasteles que había en la cesta.

Problema 26. Se escriben en una pizarra varios enteros positivos distintos. El producto de los dos menores es 16 y el producto de los dos mayores es 225. ¿Cuál es la suma de todos los enteros?

Solución:

Sean a, b los números menores y p, q los números mayores, en ese orden, entonces, $a \cdot b = 16 = 2^4$ y $p \cdot q = 225 = 5^2 \cdot 3^2$. Como los números escritos en la pizarra son distintos se tiene que $a = 2$ y $b = 8$, por lo tanto $p > 8$, es decir $p = 9$ y $q = 25$.

Problema 27. La figura muestra un pentágono. Se dibujan cinco círculos con centros en A, B, C, D y E de tal manera que los dos círculos vecinos son tangentes entre sí. Las longitudes de los lados del pentágono se dan en la figura. ¿Qué punto es el centro del mayor de los círculos dibujados?



Solución:

Si trazamos un círculo de radio r con centro en A , entonces:

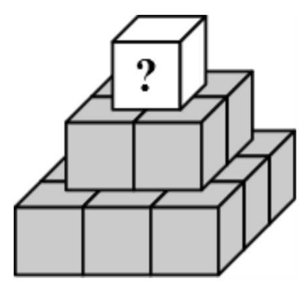
- El círculo con centro en B tiene radio $16 - r$.
- El círculo con centro en C tiene radio $14 - (16 - r) = r - 2$.
- El círculo con centro en D tiene radio $17 - (r - 2) = 19 - r$.
- El círculo con centro en E tiene radio $13 - (19 - r) = r - 6$.
- El círculo con centro en A tiene radio $14 - (r - 6) = 20 - r$.

Luego, $r = 16 - r \rightarrow r = 8$. Finalmente:

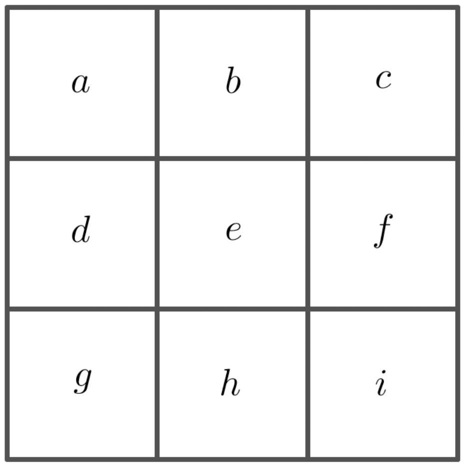
- El círculo con centro en B tiene radio $16 - 8 = 8$.
- El círculo con centro en C tiene radio $8 - 2 = 6$.
- El círculo con centro en D tiene radio $19 - 8 = 11$.
- El círculo con centro en E tiene radio $8 - 6 = 2$.
- El círculo con centro en A tiene radio $20 - 8 = 12$.

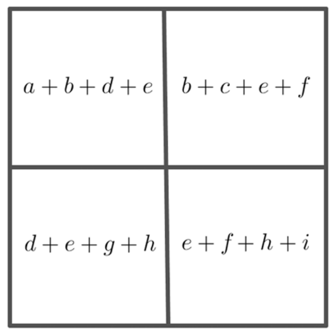
Por lo tanto A es el centro del mayor de los círculos dibujados.

Problema 28. Se escribe un entero positivo distinto en cada uno de los 14 cubos de la pirámide mostrada en la figura: La suma de los 9 enteros escritos en el piso más bajo es igual a 50. El entero escrito en cada uno de los demás cubos es igual a la suma de los enteros escritos en los 4 cubos que están debajo de él. ¿Cuál es el mayor entero posible que se puede escribir en el cubo superior?



Solución:





Sean $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ los números ubicados en la base, de modo que el siguiente piso contiene los números $a+b+d+e$, $b+c+e+f$, $d+e+g+h$, $e+f+h+i$. Por lo tanto, el cubo superior contiene el numero:

$$\begin{aligned}
&a+b+d+e+b+c+e+f+d+e+g+h+e+f+h+i\\
=&a+b+c+d+e+f+g+h+i+b+d+f+h+3e\\
=&50+b+d+f+h+3e
\end{aligned}$$

Debemos entonces maximizar el valor de $b+d+f+h+3e$. Como $a+b+c+d+e+f+g+h+i=50$, podemos asignar los valores menores a a, c, g, i, es decir, $a+c+g+i=1+2+3+4=10$, por lo tanto, $b+d+f+h+e=40$ y e debe ser el mayor valor posible, luego, $b+d+f+h+e=5+6+7+8+14$, obteniendo que el bloque superior tiene el número 108.

Problema 29. Un tren tiene cinco vagones, en cada uno de los cuales hay por lo menos un pasajero. Se dice que dos pasajeros son próximos si están en el mismo vagón o en vagones contiguos. Cada pasajero tiene o bien 5 o bien 10 pasajeros próximos. ¿Cuántos pasajeros hay en el tren?

Solución:

Sean a, b, c, d, e el número de pasajeros en cada uno de los cinco vagones, en ese orden. Si cada pasajero tiene o bien 5 o bien 10 pasajeros próximos, se concluye que $a+b=6$, $a+b+c=11$, $b+c+d=11$, $c+d+e=11$ y $d+e=6$. Por lo tanto, $a+b+c+d+e=11+6=17$.

Problema 30. Si el entero positivo x se divide por 6, el resto es 3. ¿Cuál será el resto de dividir $3x$ por 6?

Solución:

Del enunciado se concluye que $6 \cdot k + 3 = x$ para cierto entero k, luego multiplicando la ecuación por 3 se tiene que $18 \cdot k + 9 = 3x$, es decir $6(3 \cdot k + 1) + 3 = 3x$. Luego, el resto de dividir $3x$ por 6 es 3.

Problema 31. Ana está haciendo un cuadrado mágico multiplicativo utilizando los números 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100. Los productos de los números situados en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales deben ser todos iguales. Ha comenzado como se ve en la figura. ¿Qué número debe poner Ana en la casilla marcada con x?

20	1	
		x

Solución:

Notemos que el producto de los números es $2^0 + 2^1 + 2^2 + 5^1 + 2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 + 5^2 + 2 \cdot 5^2 + 2^2 \cdot 5^2 = 2^9 \cdot 5^9 = 10^9$, por lo tanto, para cada fila se debe obtener como producto 10^3 al igual que cada columna y cada diagonal. Luego, en la primera fila falta el número 50, por lo que nos falta ubicar los números $2^1, 2^2, 5^1, 2 \cdot 5, 5^2$ y $2^2 \cdot 5^2$, concluyendo que las siguientes filas deben contener los trios $2^1, 5^1, 2^2 \cdot 5^2$ y $2^2, 2 \cdot 5, 5^2$.

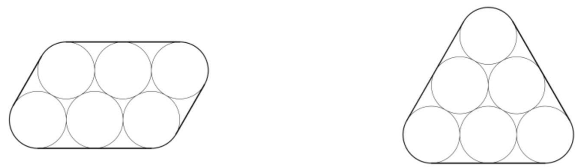
Por otra parte, en la columna central tenemos 5^0, necesitando en las casillas vacias de esa columna un 5^2 y un 5^1 y como en la esquina superior derecha ya tenemos 5^2 estamos obligados a ubicar el 5^1 al centro, esto implica que la tabla se complete de la siguiente manera:

$2^2 \cdot 5$	2^0	$2 \cdot 5^2$
5^2	5	
	5^2	5^1

Además, en la columna central tenemos 2^0, necesitando en las casillas vacias de esa columna un 2^2 y un 2^1 y como en la esquina superior izquierda ya tenemos 2^2 estamos obligados a ubicar el 2^1 al centro, esto implica que la tabla finaliza de la siguiente manera:

$2^2 \cdot 5$	2^0	$2 \cdot 5^2$
5^2	$2 \cdot 5$	2^2
2^1	$2^2 \cdot 5^2$	5^1

Problema 32. Se desea embalar seis tubos circulares de diámetro 2 cm cada uno por medio de una banda. Las dos opciones posibles se muestran en la figura:



¿Cuál crees tu que es más económica (ocupa menos huincha)? Justifica.

Solución:

Notemos que al unir los centros de los tubos que están en las esquinas se genera un romboide y un triángulo equilátero respectivamente, ambos polígonos de perímetro 12 cm. En ambos casos la banda se encuentra a distancia 1cm del polígono por lo tanto ambas bandas tienen la misma medida, luego, no hay una más económica que otra.

Problema 33. Tenemos 2016 canguros, cada uno de los cuales puede ser gris o rojo, y al menos hay uno de cada color. Para cada canguro K calculamos el cociente del número de canguros del otro color dividido por el número de canguros del mismo color que K (incluído K). Hallar la suma de las fracciones así calculadas, para los 2016 canguros.

Solución:

Supongamos que hay n canguros grises y $2016-n$ canguros rojos, siendo $n \neq 0$. Para cada canguro gris calculamos el cociente del número de canguros de color rojo dividido por el número de canguros de color gris, y sumamos las fracciones, obteniendo:

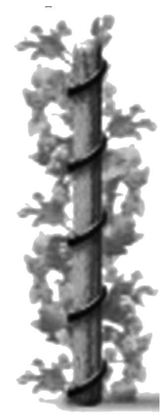
$$\underbrace{\frac{2016-n}{n}+\frac{2016-n}{n}+\frac{2016-n}{n}+\ldots+\frac{2016-n}{n}}_{n \text{ veces}}$$

Para cada canguro gris calculamos el cociente del número de canguros de color gris dividido por el número de canguros de color rojo, y sumamos las fracciones, obteniendo:

$$\underbrace{\frac{n}{2016-n}+\frac{n}{2016-n}+\frac{n}{2016-n}+\ldots\frac{n}{2016-n}}_{2016-n \text{ veces}}$$

Obteniendo como total:

$$n \cdot \frac{2016-n}{n} + (2016-n) \cdot \frac{n}{2016-n} = (2016-n) + n$$
$$= 2016$$



Problema 34. Una planta se enrolla 5 veces alrededor de un poste de 1 m de altura y 15 cm de circunferencia, como se muestra en la figura. Cuando sube, la altura se incrementa en una proporción constante. ¿Cuál es la longitud de la planta si la desenrollamos?

Solución:

Notemos que si el tronco mide 100 cm, la planta por cada vuelta sube $100 \div 5 = 20$ cm, además si abrimos el tronco (cilíndrico) de 20 cm de altura, resulta un rectángulo 20×15 cm donde la planta es la diagonal del rectángulo. Luego, por pitágoras, la longitud del trozo p de la planta cumple que $p^2 = 20^2 + 15^2$ obteniendo que $p = 25$. Por lo tanto, la longitud de la planta es de $25 \cdot 5 = 125$ cm.

Problema 35. ¿Cuál es el mayor resto posible que puede obtenerse al dividir un número de dos cifras por la suma de sus cifras?

Solución:

Notemos que si queremos obtener el mayor resto posible debemos buscar un divisor muy grande, si el divisor corresponde a la suma de dos cifras, este a lo más puede ser $9+9=18$ y el resto en este caso sería a lo más 17, pero $99 \div 18 = 18 \cdot 5 + 9$ (resto 9).

Si el divisor es $9+8=17$ el resto a lo más sería 16, pero $98 \div 17 = 17 \cdot 5 + 13$ (resto 13) y $89 \div 17 = 17 \cdot 5 + 4$ (resto 4).

Si el divisor es $9+7=8+8=16$ el resto a lo más sería 15, donde $88 \div 16 = 16 \cdot 5 + 8$ (resto 8) $97 \div 16 = 16 \cdot 6 + 1$ (resto 1) y $79 \div 16 = 16 \cdot 4 + 15$ (resto 15).

Luego, 15 es el mayor resto posible.

Problema 36. Un barco a motor tarda 4 horas en navegar, corriente abajo, desde A hasta B. El retorno, contra corriente, desde B hasta A, le lleva 6 horas. ¿cuántas horas tardaría un tronco de madera en llegar desde A a B, llevado sólo por la corriente, suponiendo que no encuentra ningún obstáculo en su camino?

Solución:

Supongamos que la velocidad del barco es x km/h, que la velocidad de la corriente es y km/h y que la distancia AB es d, Entonces, la velocidad del barco a favor de la corriente es $x+y$ y la velocidad del barco en contra de la corriente $x-y$. Además.

$$\begin{aligned} \text{velocidad} &= \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} \\ \text{tiempo} \cdot \text{velocidad} &= \text{distancia} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (x+y) &= d \\ 6 \cdot (x-y) &= d \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x + 4y &= d \\ 6x - 6y &= d \end{aligned}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por (-2), obteniendo:

$$\begin{aligned} 12x + 12y &= 3d \\ -12x + 12y &= -2d \end{aligned}$$

Luego, sumando las ecuaciones, obtenemos que $24y = d$, concluyendo que $y = \frac{d}{24}$, es decir el tronco avanza la distancia d en 24 horas.

Problema 37. En Cangurolandia cada mes tiene 40 días, numerados del 1 al 40. Los días cuyo número es divisible por 6 son vacaciones, así como los días cuyo número es primo. ¿Cuántas veces en un mes habrá un solo día de trabajo entre dos de vacaciones?

Solución:

Del 1 al 40 los números divisibles por 6 son $\{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$ y los primos son $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$. Luego son feriados los días:

•	2	3	•	5	6	7	•	•	•
11	12	13	•	•	•	17	18	19	•
•	•	23	24	•	•	•	•	29	30
31	•	•	•	•	36	37	•	•	•

Luego los días de vacaciones que cumplen con tener un día de trabajo entre ellos son 3 y 5.

Problema 38. Dos de las alturas de un triángulo miden 10 y 11 cm, respectivamente. ¿Cuál es el mínimo valor entero que puede tomar la medida de la tercera altura?

Solución:

Sean a, b, c los lados del triángulo, 10, 11 , x las alturas y A su área, luego:

$$a \cdot 10 = b \cdot 11 = c \cdot x = A$$

Por lo tanto, $a = \dfrac{A}{10}$, $b = \dfrac{A}{11}$ y $c = \dfrac{A}{x}$. Utilizando la desigualdad triangular $a + b > c$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{A}{10} + \frac{A}{11} &> \frac{A}{x} \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{11} &> \frac{1}{x} \\ \frac{21}{110} &> \frac{1}{x} \\ \frac{110}{21} &< x \end{aligned}$$

Problema 39. Joel escribe cuatro enteros positivos consecutivos. A continuación calcula los cuatro totales posibles sumando tres de los enteros. Ninguno de esos totales era primo. ¿Cuál es el menor entero que pudo escribir Joel?

Solución:

Supongamos que los números consecutivos son $x-1, x, x+1, x+2$, luego, los cuatro totales posibles son $3x, 3x+1, 3x+2, 3x+3$.

Notemos que los cuatro totales posibles también son consecutivos, donde el menor total y el mayor total son ambos múltiplos de 3.

Si los primos son $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$ y necesariamente entre 2 primos necesitamos tener 4 números consecutivos, dichos consecutivos deben estar entre 23 y 29, luego el mínimo total es $24 = 7+8+9$. El cuál cumple la condición de ser múltiplo de 3. Siendo 7 el menor entero que pudo escribir Joel.

Problema 40. Cuatro deportistas están sentados alrededor de una mesa redonda. Los deportes que practican son: fútbol, básquetbol, atletismo y nado. Quien juega futbol se sienta a la izquierda de Andrea. Quien practica básquetbol está sentado frente a Vicente. Eva y Felipe están sentados juntos. La persona sentada a la izquierda de quien practica atletismo es una mujer. ¿Qué deporte practica Eva?

Solución:

Notemos que si Eva y Felipe están sentados juntos, Andrea y Vicente también están sentados juntos, como quien practica básquetbol está sentado frente a Vicente, se concluye que Andrea no practica basquetbol pues esta al lado de el.

Quien juega futbol se sienta a la izquierda de Andrea y quien practica básquetbol está sentado frente a Vicente, y como Andrea no practica basquetbol ella no esta frente a Vicente, por lo tanto Vicente está a la izquierda de Andrea y juega futbol y el deportista que juega basquetbol está frente a Vicente, es decir a la derecha de Andrea.

Luego Eva juega basquetbol o practica atletismo, pero como la persona sentada a la izquierda de quien practica atletismo es una mujer, se concluye que Felipe practica atletismo y Eva juega basquetbol.

Problema 41. Se puede escribir las fechas en la forma $DD/MM/AAAA$. Por ejemplo la fecha de hoy es 04/06/2016. Llamaremos sorprendente a una fecha si los 8 números escritos de esta manera son diferentes. ¿Cuándo será la más próxima fecha sorprendente?

Solución:

17/06/2345.

Problema 42. En una conferencia, los 2016 participantes está registrados como $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2016}$. Cada participante desde P_1 hasta P_{2015} estrecha la mano de un número de participantes igual a su propio número de registro. ¿Cuántas manos estrechó el participante P_{2016}?

Solución:

Si cada uno estrecha la mano de un número de participantes igual a su propio número de registro, entonces:

- P_{2015} estrechó la mano con todos los participantes, con $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2014}$ y con P_{2016}, por lo tanto, P_1 le dió la mano solo a P_{2015} y no a P_{2016}.
- P_{2014} estrechó la mano con todos los participantes excepto con P_1, es decir, estrecho la mano con $P_2, P_3, P_4, \ldots, P_{2013}, P_{2015}, P_{2016}$, por lo tanto, P_2 le dió la mano solo a P_{2015} y a P_{2014} y no a P_{2016}.
- P_{2013} estrechó la mano con todos los participantes excepto con P_1 y P_2, es decir, estrecho la mano con $P_3, P_4, P_5, \ldots, P_{2012}, P_{2014}, P_{2015}, P_{2016}$, por lo tanto, P_2 le dió la mano a P_{2015}, a P_{2014} y a P_{2013} y no a P_{2016}.

Luego cada vez que un participante P_{2016-k} estrecha la mano a P_{2016}, el participante P_k no lo puede hacer, es decir, cuando el participante $P_{2016-1007} = P_{1009}$ estrecha la mano a P_{2016}, el participante P_{1007} no lo puede hacer, por lo tanto, el participante P_{1008} también de la mano a P_{2016}.

Finalmente P_{2016} estrecha la mano con $P_{1008}, P_{1009}, P_{1010}, P_{1015}, \ldots P_{2015}$, es decir con 1008 participantes.

Problema 43. Dado un número de tres dígitos xyz, la suma de sus dígitos es 26. Determine el producto de sus dígitos.

Solución:

Si la suma de los tres dígitos es 26, entonces los dígitos son 9, 9 y 8, cuyo producto es $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Problema 44. Tenemos cajas numeradas desde 1 hasta k y bolas númeradas desde el 1 hasta 2016. En la caja 1 se guarda la bola 1, en la caja 2 las siguientes dos bolas (bola 2 y bola 3) en la caja 3 las siguientes 3 bolas (bola 4, bola 5 y bola 6) y así susecivamente, en ese orden. Si la bola 2016 se guardó en la caja k. Hallar el valor de k.

Solución:

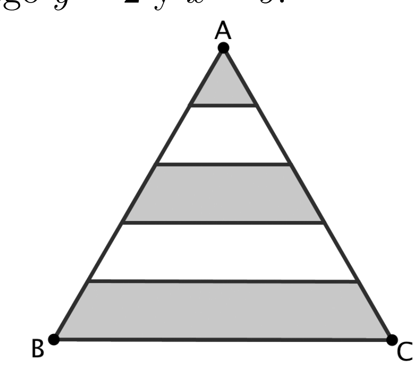
Notemos que si existieran n cajas, en las cajas $1, 2, 3, \ldots, n$ se habrían guardado $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ bolas. Como $2016 = \dfrac{63 \cdot 64}{2}$, se concluye que la bola 2016 se guardó en la caja 63.

Problema 45. Si se suman las dígitos del número xyx (de tres dígitos), el resultado es el número de dos dígitos yz. Si se suman las cifras de este número, se obtiene el número y de una cifra. Encuentre la cifra x.

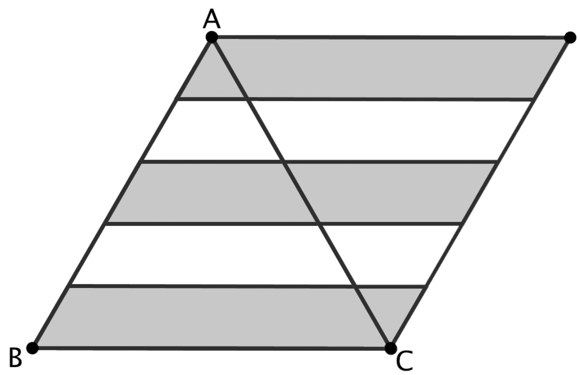
Solución:

Como al sumar las cifras del número yz se obtiene el número y de una cifra, concluimos que $z = 0$. Si $z = 0$, $yz = 10$ o $yz = 20$, pero como $x + y + x = yz$, e yz es par, y debe ser par. Luego $y = 2$ y $x = 9$.

Problema 46. En el triángulo ABC de la figura se han trazado 4 rectas paralelas a la base del triángulo a igual distancia una de otra. Si el triángulo ABC tiene área 10 cm^2, determine el área sombreada.



Solución:



Notemos que el paralelogramo de la figura esta formado por el triángulo ABC y por otro triángulo congruente a el, dicho paralelógramo tiene 20cm^2 de área. Como las 4 rectas son paralelas a la base del triángulo y están igual distancia una de otra, se concluye que el área sombreada en el paralelógramo es $\frac{3}{5}$ del total, es decir, 12cm^2.

Finalmente, el área sombreada en el paralelógramo es 6 cm^2.

Problema 47. Los 4 nietos del abuelo Anacleto que son menores de 10 años, tienen edades distintas. El abuelo calcula el producto de sus edades y obtiene 2016. Hallar la edad de cada nieto.

Solución:

Notemos que $2016 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, luego, a lo más uno de los nietos tiene $3 \cdot 3 = 9$ años, el siguiente tiene $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ años, el siguiente tiene 7 años y el menor tiene $2 \cdot 2 = 4$ años.

Problema 48. El número 391 se divide por 37 y se obtiene un número décimal. Hallar el decimal que ocupa el lugar 37° (después de la coma).

Solución:

Notemos que al realizar la división se obtiene un número periódico, $391 \div 37 = 10,\overline{567}$, donde 7 está en el lugar $3, 6, 9, \ldots, 33, 36$, luego, el decimal que ocupa el lugar 37° es el 5.

Problema 49. La suma de las edades de Tomás y Juan es 23; la suma de las edades de Juan y Alex es 24 y la suma de las edades de Tomás y Alex es 25. ¿Cuál es la edad del mayor de los tres?

Solución:

Sumando las tres ecuaciones se obtiene:

$$2T + 2A + 2J = 72 \Rightarrow T + A + J = 36.$$

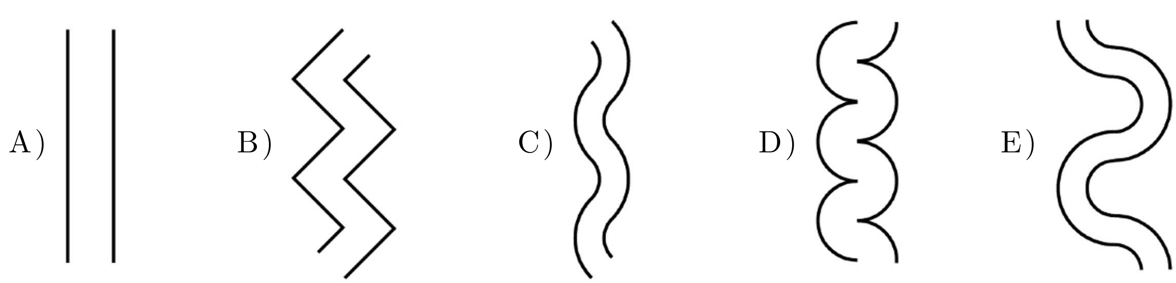
Como $J + T = 23$, entonces $A = 13$. Como $J + A = 24$, entonces $T = 12$. Como $A + T = 25$, entonces $J = 11$. Luego, Alex es el mayor de los tres y tiene 13 años.

Problema 50. Calcule la suma $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$.

Solución:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{100}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{111}{1000}$$

Problema 51. María quiere construir un puente para cruzar un río y sabe que la longitud del puente más corto desde cualquier punto de una orilla es siempre la misma. ¿Cuál de las figuras siguientes no puede ser del río de María?



Solución:

En la figura B) pues la distancia entre los vertices no es mayor que la distancia entre los segmentos.

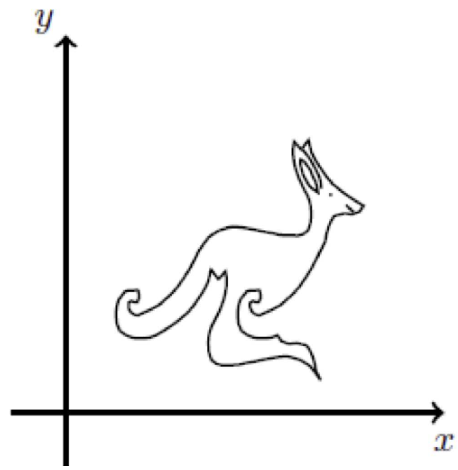
Problema 52. ¿Cuántos enteros hay mayores que 2015×2017 pero menores que 2016×2016?

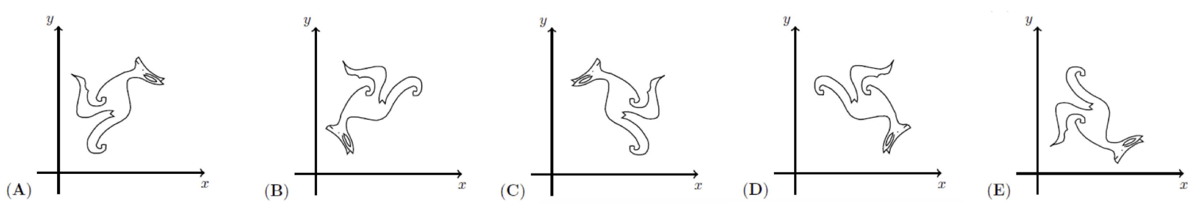
Solución: Determinemos los enteros z de modo que $2015 \times 2017 < z < 2016 \times 2016$, es decir:

$$(2016-1) \times (2016+1) < z < 2016 \times 2016$$
$$2016^2 - 1 < z < 2016^2$$

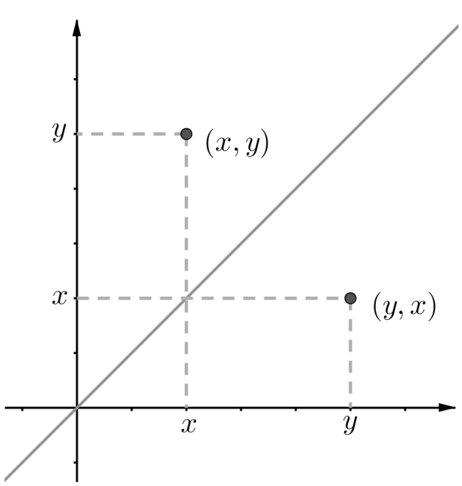
Luego, estos numeros son consecutivos, por lo tanto, no hay numeros que cumplan dicha condición

Problema 53. Un conjunto de puntos con la figura del canguro se sitúa en el plano xy como se muestra en la figura, de modo que para cada punto, se intercambian las coordenadas x e y. ¿Cuál es el resultado?





Solución:

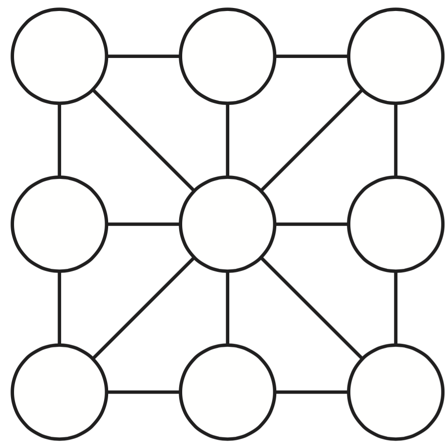


Notemos que si se intercambian las coordenadas x e y hay simetría con respecto a la recta $y = x$, por lo tanto, en la figura original se debe trazar dicha recta y reflejar los puntos que forman el canguro con respecto a ella, obteniendose como resultado la fugura A).

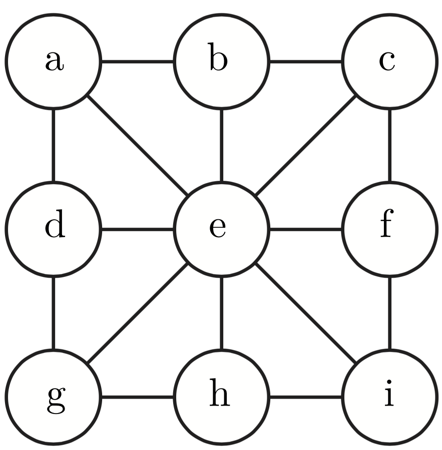
Problema 54. ¿Cuál es el menor número de planos necesarios para limitar una parte acotada (de más de un punto) en el espacio tridimensional?

Solución: 3 planos son suficientes para encerrar una región acotada en el espacio, es decir, una piramide de base triangular.

Problema 55. Diana quiere escribir nueve enteros en los círculos de la figura de manera que, para los ocho triangulos cuyos vértices se unen por segmentos, las sumas de los números en sus vértices sean iguales. ¿Cuál es el mayor número de enteros distintos que puede usar?



Solución:

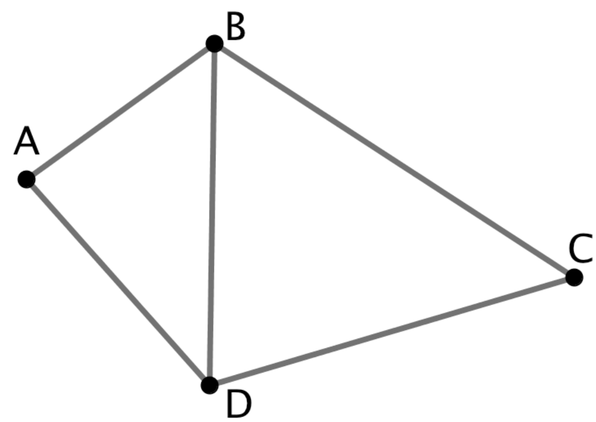


Notemos que $b = f = d = h$ pues:

- $a + b + e = a + d + e \Rightarrow b = d$
- $c + b + e = c + f + e \Rightarrow b = f$
- $e + f + i = e + i + h \Rightarrow f = h$
- $e + g + h = e + g + d \Rightarrow h = d$

Y como todos los triángulos tienen en común el vertice e, entonces, $a = c = i = g$, luego, a los más se pueden usar tres números distintos.

Problema 56. Los rectángulos S_1 y S_2 de la figura tienen la misma área. Determinar el valor de la razón $\dfrac{x}{y}$.



Solución:

Como $S_1 = S_2$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(5-y)x &= (8-x)y\\ 5x - xy &= 8y - xy\\ 5x &= 8y\\ \frac{x}{y} &= \frac{8}{5}\end{aligned}$$

Problema 57. Si $x^2 - 4x + 2 = 0$. Calcule el valor de $x + \dfrac{2}{x}$.

Solución: Utilizando la formula general se tiene que:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

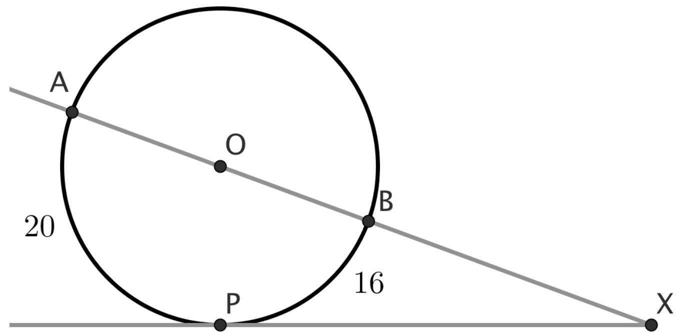
Luego, para $x = 2 + \sqrt{2}$ tenemos:

$$x + \frac{2}{x} = 2 + \sqrt{2} + \frac{2}{2+\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$$

Y para $x = 2 - \sqrt{2}$ tenemos:

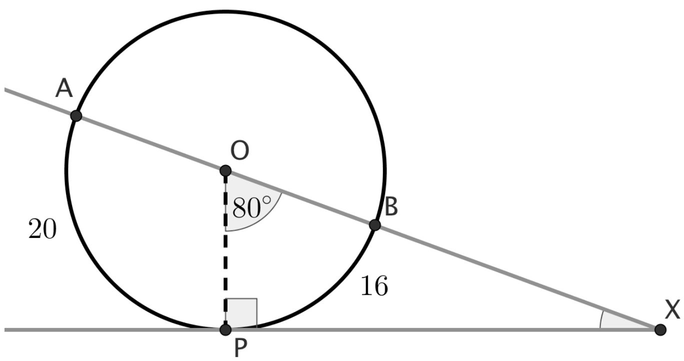
$$x + \frac{2}{x} = 2 - \sqrt{2} + \frac{2}{2-\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 4$$

Problema 58. Las longitudes de los arcos AP y BP de la figura son 20 y 16, respectivamente. La medida en grados del ángulo $\angle AXP$ es



$\boxed{\text{Solución:}}$ Notemos que $\overset{\frown}{AP}= 20$ y $\overset{\frown}{PB}= 16$. Por lo tanto, $\overset{\frown}{AB}= 20 + 16 = 36$. Luego:

$$\frac{36}{16} = \frac{180^\circ}{\angle POB} \Rightarrow \angle POB = 80^\circ$$



Finalmente en el triángulo $\triangle XOP$, se tiene que $\angle AXP = 10^\circ$.

Problema 59. a, b, c y d son enteros positivos tales que $a + 2 = b–2 = 2c = \frac{d}{2}$. ¿Cuál es el mayor de los números a, b, c y d?

$\boxed{\text{Solución:}}$

(1) $a + 2 = b–2 \Rightarrow a + 4 = b \Rightarrow a < b$

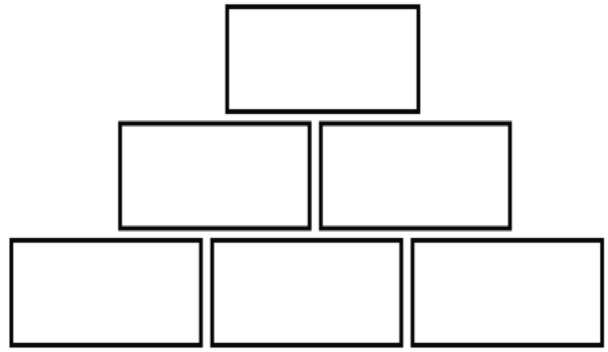
(2) $b–2 = 2c \Rightarrow b = 2c + 2 \Rightarrow b > c$

(3) $a+2 = 2c$. Como a es positivo y par, cuando $a = 2$ tenemos que $a = c$, cuando $a > 2$ tenemos que $a < c$. Entonces $a \leq c$

Por (3), a es par, por (1), $a + 4 = b$, entonces $b \geq 6$. Por otra parte $b–2 = \frac{d}{2} \Rightarrow d = 2b - 4$. Cuando $b = 6$ tenemos que $d = 8$, cuando $b = 8$ tenemos que $d = 12$. Entonces $d \leq b$.

Finalmente $a \leq c < b < d$

Problema 60. En esta pirámide de números cada bloque superior es el producto de los dos bloques que tiene debajo:
¿Cuál de los siguientes números no puede aparecer en el bloque superior, si los tres números de la fila inferior son números naturales mayores que 1?



A) 56 B) 84 C) 90 D) 105 E) 220

$\boxed{\text{Solución:}}$

Si los bloques inferiores tienen los numeros a, b y c, los bloques del centro tienen los números $a \cdot b$ y $b \cdot c$ de modo que el bloque superior contiene el número $a \cdot b \cdot b \cdot c$, Además:

- $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$
- $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$
- $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
- $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
- $220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$

De estos números el único que no es de la forma $a \cdot b \cdot b \cdot c$ es 105. Luego, este no puede estar en el bloque superior.

Problema 61. ¿Cuánto vale x_4, si $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = x_n^{x_n}$ para n mayor o igual que 1?

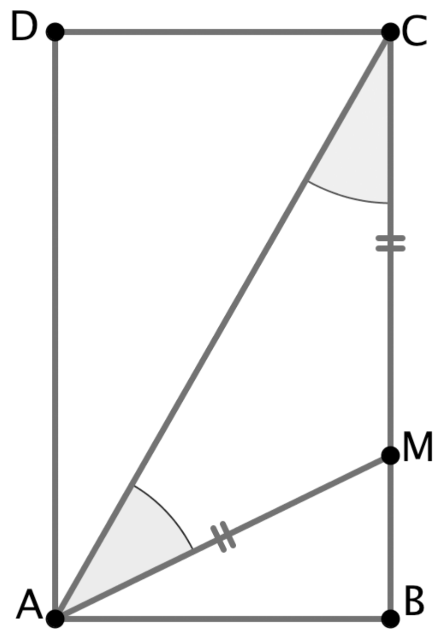
$\boxed{\text{Solución:}}$

- $x_1 = 2$

- $x_2 = 2^2$
- $x_3 = \left(2^2\right)^{2^2} = 2^{2\cdot 2^2} = 2^{2^3}$
- $x_4 = \left(2^{2^3}\right)^{2^{2^3}} = \left(2^{2^3}\right)^{2^8} = 2^{2^3\cdot 2^8} = 2^{2^{11}}$

Problema 62. En el rectángulo $ABCD$ la longitud del lado BC es la mitad de la longitud de la diagonal AC. Sea M un punto de CD tal que $AM = MC$. Determine la medida en grados del ángulo $\angle CAM$.

Solución:



Recordemos que un triángulo rectángulo muy conocido, es el que tiene el cateto menor igual a la mitad de la hipotenusa, y estos dos lados forman un ángulo agudo de 30° y el otro ángulo de 60°.
En este caso como $AC = 2BC$ y el triángulo ABC es rectángulo en B se tiene que el ángulo $\angle BCA = 30°$ y como el triángulo AMC es isósceles de base AC, se concluye que el ángulo $\angle CAM = 30°$.

Problema 63. Diana corta un rectángulo de área 2016 en 56 cuadrados iguales. Las longitudes de los lados del rectángulo y de los cuadrados son enteros. ¿Para cuántos rectángulos diferentes es posible hacer esto?

Solución:

Observemos que $2016 = 56 \cdot 36$. Entonces, los cuadrados son de área $6 \cdot 6 = 36$. Luego, tenemos que ver de cuantas maneras se puede descomponer 56 en factores enteros:

- $56 = 56 \cdot 1$
- $56 = 28 \cdot 2$
- $56 = 14 \cdot 4$
- $56 = 7 \cdot 8$

Finalmente, es posible hacer esto para 4 rectángulos diferentes.

Problema 64. Cada uno de los habitantes de la Isla de los Caballeros y Escuderos es, o bien un Caballero (que siempre dice la verdad) o un escudero (que siempre miente). Durante un viaje a la isla, encuentras a 7 personas en torno a una fogata. Los siete te dicen: "Estoy sentado entre dos escuderos". ¿Cuántos escuderos hay en el grupo?

Solución:

Notemos que es imposible que 3 escuderos esten juntos, pues el escudero del centro estaría dicinedo la verdad, de este modo no pueden haber 7 escuderos, pues habrían 7 escuderos juntos, no pueden haber 6 escuderos, pues habrían 6 escuderos juntos, no pueden haber 5 escuderos, pues habrían 5 o 4 o 3 escuderos juntos.

Observemos que en la fogata si pueden haber 4 escuderos como lo muestra el siguiente ejemplo:

C

E E

C E

E C

Problema 65. Las ecuaciones $x^2 + ax + b = 0$ y $x^2 + bx + a = 0$ tienen, ambas, raíces reales. Se sabe que la suma de los cuadrados de las raíces de la primera ecuación es igual a la suma de los cuadrados de las raíces de la segunda, y a es distinto de b. Calcule el valor de $a + b$.

Solución:

Las raices de la primera ecuación son:

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Y las raices de la segunda ecuación son:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2}.$$

La suma de los cuadrados de las raíces de la primera ecuación es:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right)^2\\ =&a^2 - 2a\sqrt{a^2 - 4b} + a^2 - 4b + a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 4b} + a^2 - 4b\end{aligned}$$

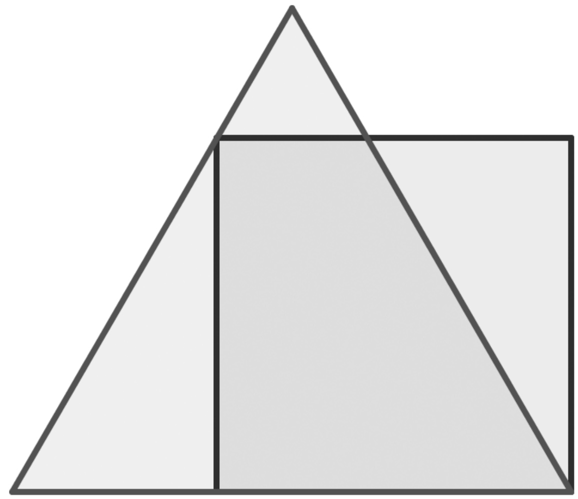
La suma de los cuadrados de las raíces de la segunda ecuación es:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2}\right)^2\\ =&b^2 - 2b\sqrt{b^2 - 4a} + b^2 - 4a + b^2 + 2b\sqrt{b^2 - 4a} + b^2 - 4a\end{aligned}$$

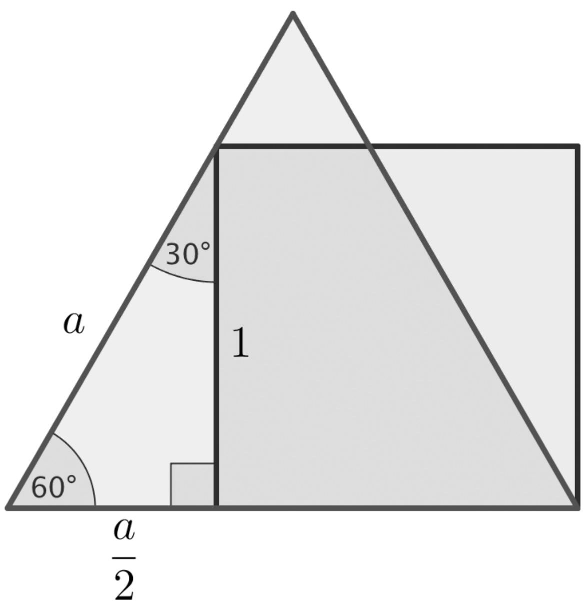
Se sabe que la suma de los cuadrados de las raíces de la primera ecuación es igual a la suma de los cuadrados de las raíces de la segunda:

$$\begin{aligned}4a^2 - 8b &= 4b^2 - 8a\\ a^2 - 2b &= b^2 - 2a\\ a^2 - b^2 &= -2a + 2b\\ (a+b)(a-b) &= -2(a-b)\\ a + b &= -2\end{aligned}$$

Problema 66. Si el perímetro del cuadrado de la figura es 4. Determine el perímetro del triángulo equilátero.



Solución:



Si el perímetro del cuadrado es 4, el cuadrado es de lado 1. El triángulo rectángulo generado a la izquierda, tiene ángulos de $30°, 60°$ y $90°$ si la hipotenusa mide a, el cateto menor mide $\frac{a}{2}$ y el cateto mayor mide $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Luego:

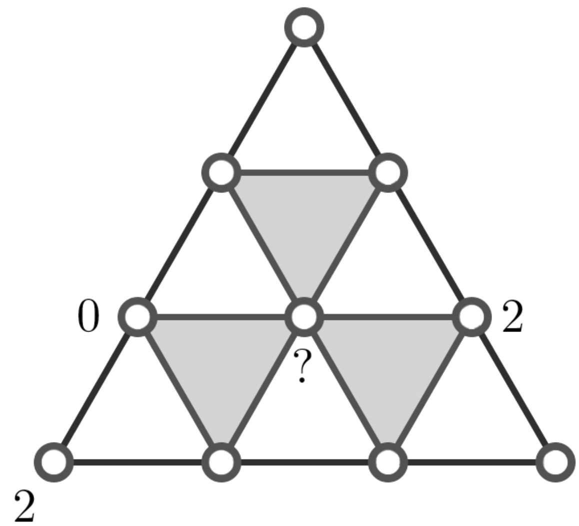
$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Por lo tanto el lado el lado del triángulo es:

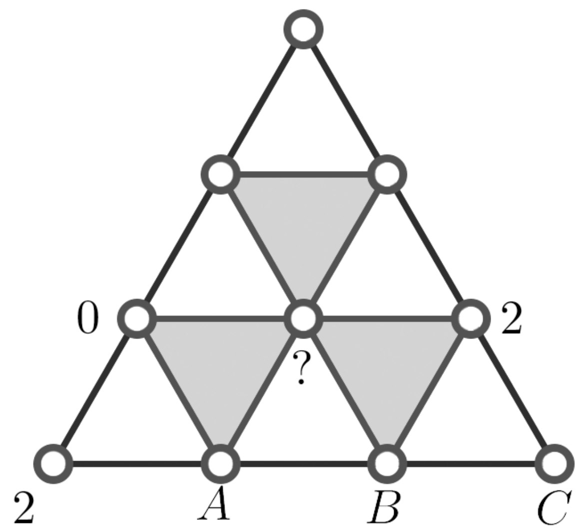
$$\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}.$$

Finalmente el perímetro del triángulo es $P = 3 + \sqrt{3}$.

Problema 67. Cada uno de los diez puntos de la figura está marcado con uno de los tres números 0, 1 ó 2. Se sabe que la suma de los números en los vértices de cualquier triángulo blanco es divisible por 3, mientras que la suma de los números en los vértices de cualquier triángulo negro NO es divisible por 3. En la figura hay marcados tres puntos. ¿Qué números se pueden usar para marcar el punto central?



Solución:

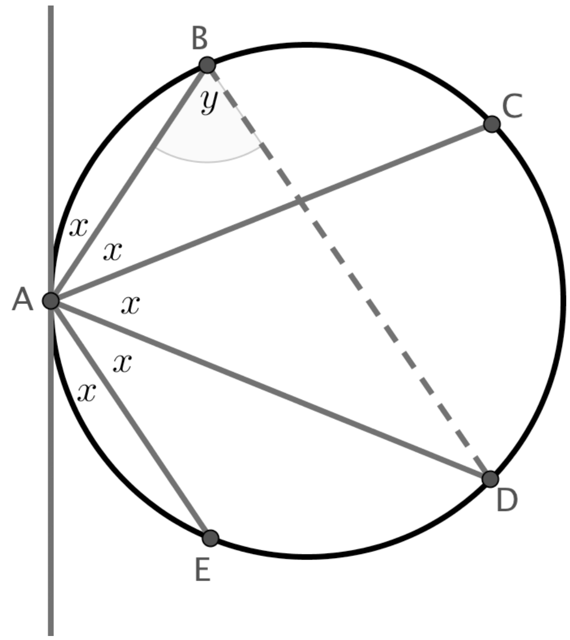


En el triángulo blanco ubicado en la esquina inferior izquierda el vértice faltante A se debe marcar con el número 1 para que sus vértices sumen 3, concluyendo que ? $\neq$ 2. Además, en el triángulo blanco ubicado en la esquina inferior derecha, tenemos 3 opciones:

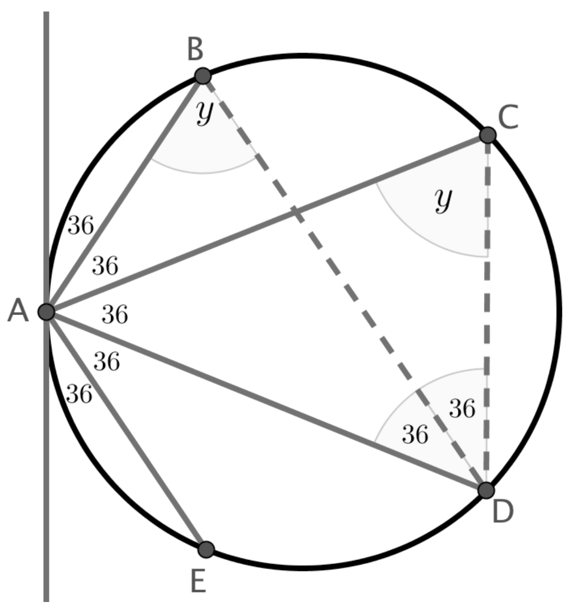
- $B = 1$ y $C = 0$. Lo cual obliga a que ? $= 1$, pues $A + B +? = 3$, pero el valor de ? no puede ser 1 porque el triángulo negro superior sumaría 3.
- $B = 0$ y $C = 1$. Lo cual obliga a que ? $= 0$, pues $A + B +? = 3$
- $B = 2$ y $C = 2$. Lo cual obliga a que ? $= 2$. Pero por la condición anterior no puede ser 2.

Concluimos que el centro sólo puede tomar el valor 0.

Problema 68. Beatriz dibuja cinco puntos A, B, C, D y E en una circunferencia así como la tangente a la circunferencia en A, como se muestra en la figura, de tal manera que los cinco ángulos marcados con x son iguales (el dibujo no está a escala). ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo $\angle ABD$?



Solución:



Como los 5 ángulos son iguales, y los 5 ángulos suman 180° se deduce que $x = 36°$, además los cinco arcos son congruentes. Notemos que $\angle BAC = \angle BDC \angle ADB = 36°$ pues dichos ángulos de la circunferencia subtienden arcos congurentes, por la misma razón se tiene que $\angle ABD = \angle ACD = 72°$, luego en el triángulo $\triangle ABD$, se cumple que:

$$3 \cdot 36 + y = 180 \Rightarrow y = \angle ABD = 72°$$

Problema 69. Determine cuántas soluciones distintas tiene la ecuación:

$$(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1$$

.

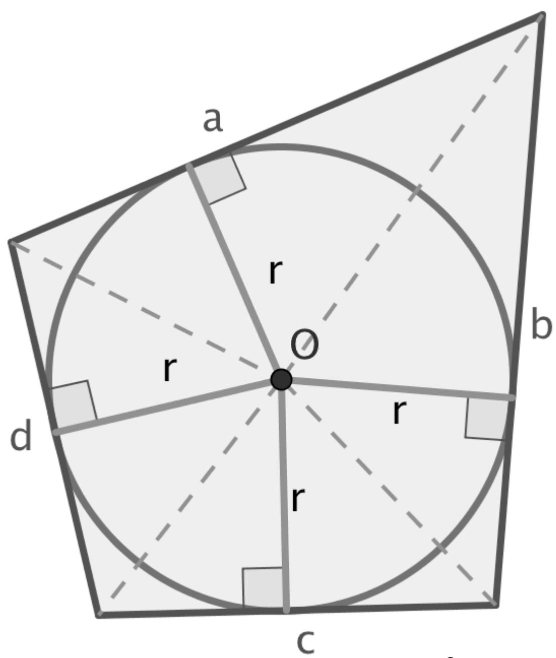
Solución:

Dicha potencia es 1 si, el exponente es 0 y la base es distinta de 0, o bien, si la base es 1. Es decir:

- $x^2 - 4x + 5 = (x+6)(x-5) = 0$, es decir, si $x = -6$ y $x = 5$ y que $x^2 - 4x + 5$ sea distinto de 0, lo cual siempre se cumple pues su discriminante es negativo. Luego, esta condición se cumple si $x = -6$ y $x = 5$.
- $x^2 - 4x + 5 = 1 \to x^2 - 4x + 4 = 0 \to (x-2)^2 = 0$, es decir, si $x = 2$.

Problema 70. Un cuadrilátero convexo tiene un círculo inscrito (esto es,un círculo tangente a los cuatro lados del cuadrilátero). La razón del perímetro del cuadrilátero al del círculo es $4 : 3$. Determine la razón del área del cuadrilátero a la del círculo.

Solución:



Sabemos que:

$$\frac{a+b+c+d}{2\pi r} = \frac{4}{3}$$

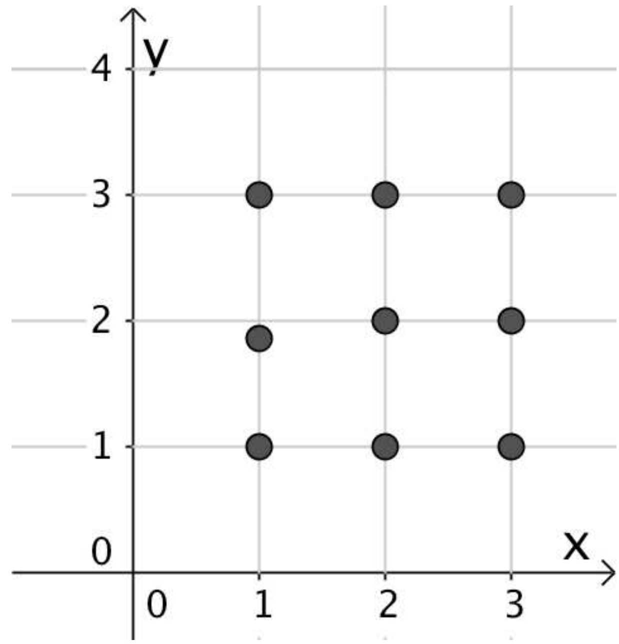
Como la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio concluimos que el área del cuadrilatero está dada por la suma de los cuatro triángulos de base a, b, c, d y altura r. es decir el área del cuadrilatero es:

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2}.$$

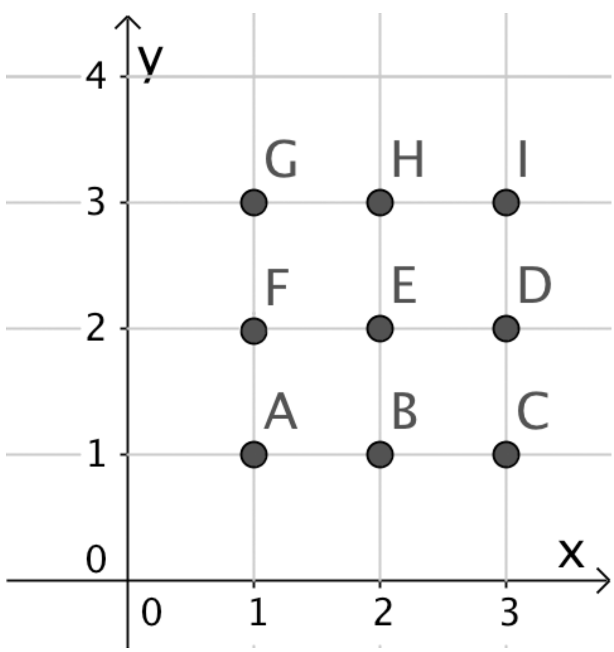
Y el área del círculo es πr^2. Luego, la razón pedida es:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2}}{\pi r^2} &= \frac{\frac{r}{2}(a+b+c+d)}{\pi r^2} \\
&= \frac{a+b+c+d}{2\pi r} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Problema 71. ¿Cuántas funciones cuadráticas en x tienen una gráfica que pasa al menos por tres de los puntos marcados en la figura?



Solución:



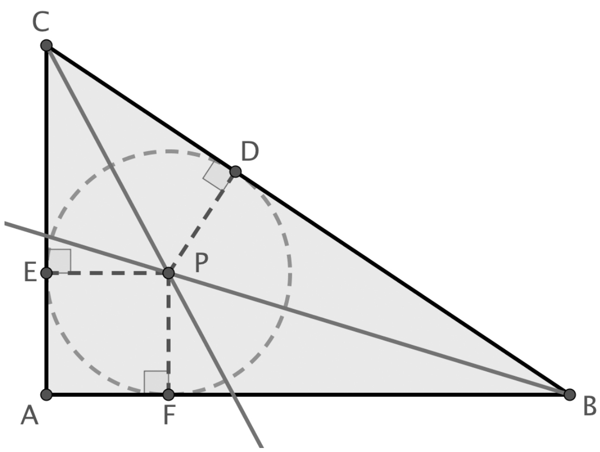
Notemos que para que sea función, una preimagen no puede tener 2 o más imagenes, es decir, dadas las tres columnas de puntos, la curva debe pasar solo por uno de los puntos de cada columna. Comenzaremos contando todas las conexiones existentes con esta condición, en la primera columna podemos elegir un punto de 3 maneras, en la segunda columna podemos elegir un punto de 3 maneras y en la tercera columna podemos elegir un punto de 3 maneras. luego podemos trazar $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ conexiones.

De estas 27 conexiones descartamos los conjuntos de puntos que no pueden pertenecer a una parábola, estos son 5 $(ABC, FED, GHI, AEI, GEC)$.

Finalmente existen 22 funciones cuadráticas distintas en x cuya gráfica pasa al menos por tres de los puntos marcados en la figura.

Problema 72. En un triángulo ABC, rectángulo en A, las bisectrices de los ángulos agudos se cortan en un punto P. Si la distancia de P a la hipotenusa es $\sqrt{8}$, ¿cuál es la distancia desde P al vértice A?

Solución:



Las bisectrices se intersectan en un punto llamado incentro, el cuál, es el centro de la circunferencia inscrita al tríangulo, dicha circunferencia inscrita es tangente a los lados del triángulo, es decir, los lados del triángulos son tangentes a los radios respectivos de la circunferencia, luego, el radio mide $\sqrt{8}$.

Por la razón anterior se concluye que $AEPF$ es un cuadrado de lado $\sqrt{8}$, por lo tanto, AP es su diagonal. Luego, $AP\sqrt{2}\sqrt{8}$.

Problema 73. Con las cifras de 1 a 9 (usando cada cifra exactamente una vez) se forman tres números de tres cifras. ¿Cuál de los siguientes NO puede ser la suma de esos tres números?

A) 1500 B) 1503 C) 1512 D) 1521 E) 1575

Solución:

Sean abc, def, ghi los tres números de tres cifras. Notemos que las cifras del 1 al 9 suman 45 y la suma de los dígitos de los trios a lo menos es $1 + 2 + 3 = 6$ y a lo más es $7 + 8 + 9 = 24$. Comencemos analizando

1500. Para que la unidad sea 0 la suma de las unidades puede ser:

- 10, de ser así, para que la decena sea 0, la suma de las decenas debe ser:
  - 9, de ser así la suma de las centenas debe ser 14. Pero $10+9+4 = 23$, no sirve.

    - 19, de ser así la suma de las centenas debe ser 13. Pero $10+19+13=42$, no sirve.

- 20, de ser así, para que la decena sea 0, la suma de las decenas debe ser:

    - 8, de ser así la suma de las centenas debe ser 14. Pero $20+8+14=42$, no sirve.
    - 18, de ser así la suma de las centenas debe ser 13. Pero $20+18+13=51$, no sirve.

Luego, 1500 NO puede ser la suma de esos tres números.

Podemos ver que para 1503 puede ser la suma de los 3 números, cuando la suma de las unidades es 13, la suma de las decenas es 19 y la suma de las centenas es 13 pues $13+19+13=45$. 1512 puede ser la suma de los 3 números, cuando la suma de las unidades es 12, la suma de las decenas es 20 y la suma de las centenas es 13 pues $12+20+13=45$. 1521 puede ser la suma de los 3 números, cuando la suma de las unidades es 11, la suma de las decenas es 21 y la suma de las centenas es 13 pues $11+21+13=45$. 1575 puede ser la suma de los 3 números, cuando la suma de las unidades es 15, la suma de las decenas es 16 y la suma de las centenas es 14 pues $15+16+14=45$.

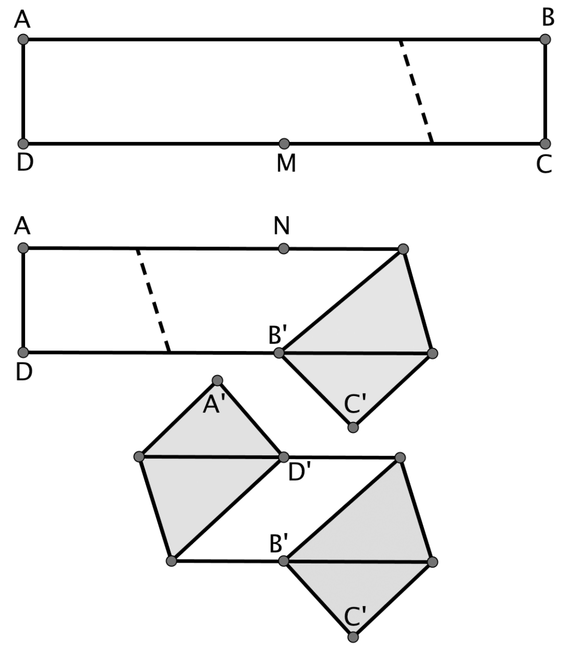
Problema 74. Un cubo de lado entero se descompone en 6 pirámides de base cuadrada, uniendo un punto interior con cada uno de los vértices del cubo. Los volúmenes de cinco de esas pirámides son 4, 10, 11, 14 y 16. ¿Cuál es el menor volumen que la sexta pirámide puede tener?

Solución:

Cualquier punto interior en el cubo que permita formar 6 pirámides cumple que para dos piramides opuestas por el vértice tiene suma constante, pues la suma de las alturas de dichas pirámides es igual a la medida del lado del cubo.

Luego, $2+14=16$, $5+11=16$, $10+x=16$, por lo tanto el volumen de la sexta pirámide es 6.

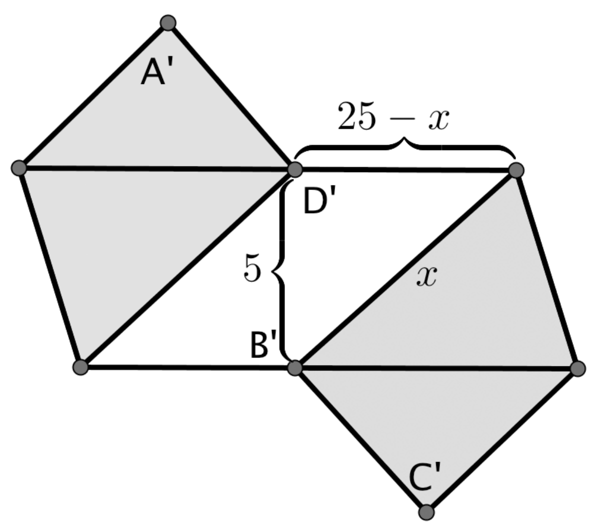
Problema 75. La tira rectangular $ABCD$ de 5 cm de ancho y 50 cm de largo es amarilla por un lado y verde por otro. Doblando la tira, Cristina hace coincidir el vértice B con el punto medio M del lado CD. Doblándola otra vez, el vértice D coincide con el punto medio N del lado AB. ¿Cuál es el área, en cm2, de la parte visible amarilla de la última figura?



Solución:

Si el primer doblez se realiza a x unidades del punto B, en el centro se forma un triángulo rectángulo de catetos $25-x$, 5 e hipotenusa x, por lo tanto se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}(25-x)^2+5^2 &= x^2\\ 625-50x+x^2+25 &= x^2\\ 650 &= 50x\\ 13 &= x\end{aligned}$$



Problema 76. Ana elige un entero positivo n y escribe la suma de todos los enteros positivos desde 1 hasta n. Un número primo p divide a la suma, pero no a ninguno de los sumandos. ¿Cuál de los siguientes puede ser $n+p$?

A) 217 B) 221 C) 229 D) 245 E) 269

Solución:

Sabemos que la suma desde 1 hasta n es:

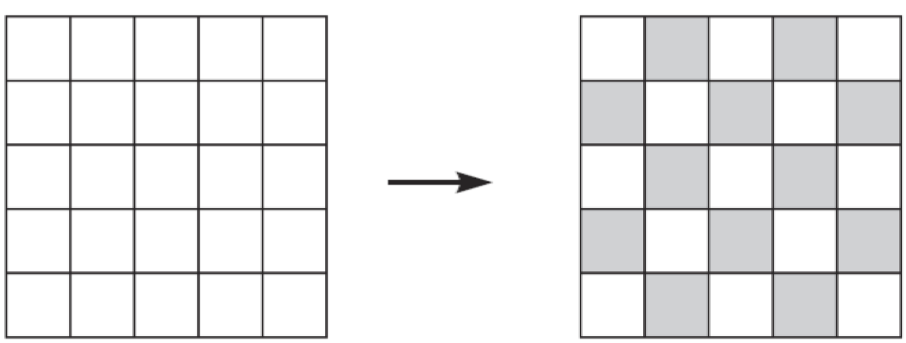
$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

, notemos que si n es par, la suma es divisible por $n+1$, y si $n+1$ es par la suma es divisible por n.

Además, como p no divide a ninguno de los sumandos concluimos que $p > n$.

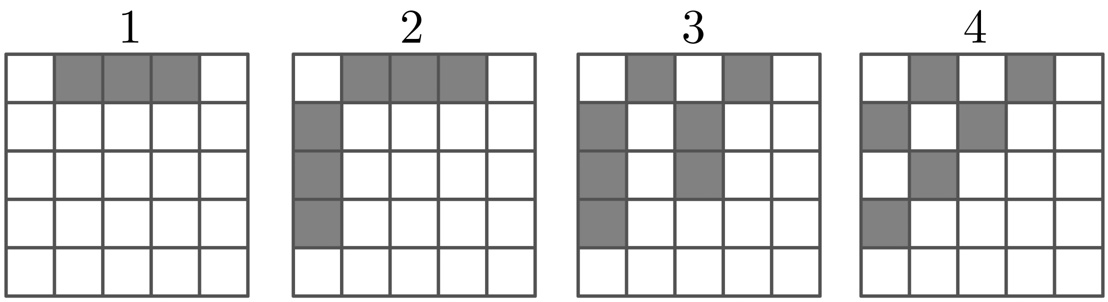
Observemos que $217 = 108 + 109$, siendo 109 un número primo que divide a $\dfrac{108 \cdot 109}{2}$, luego 217 puede ser $n + p$

Problema 77. Se considera el cuadrado 5×5 dividido en 25 casillas. Inicialmente todas las casillas son blancas, como se muestra en la figura de la izquierda. Se llamarán casillas vecinas aquellas que comparten un lado. Cuando la pieza mágica de triminó del abuelo Anacleto se pone durante 5 segundos sobre tres casillas consecutivas, misteriosamente estas casillas cambian sus colores al color opuesto (las blancas se hacen negras y las negras se hacen blancas). ¿Cuál es el número mínimo de veces que se debe poner esta pieza para obtener el ajedrezado aspecto de la figura de la derecha?



Solución:

Observemos que con los poniendo la pieza mágica 4 veces podemos cubrir con el aspecto ajedrezado la mitad del tablero, luego, por simetría se debe poner la pieza 4 veces más, en total 8 veces.



Problema 78. El entero positivo N tiene exactamente seis divisores positivos distintos, incluyendo a 1 y a N. El producto de cinco de ellos es 648. ¿Cuál es el sexto divisor de N?

Solución:

Si un número tiene exactamente $6 = 2 \cdot 3$ divisores positivos distintos, este número es de la forma $a^1 \cdot b^2$, cuyos divisores son $1, a, b, a \cdot b, b^2, a \cdot b^2$. Por otra parte, $648 = 2^3 \cdot 3^4 = (2) \cdot (3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3^2)$. Luego, los seis divisores son $1, 2, 3, 2 \cdot 3, 3^2, 2 \cdot 3^2$, por lo tanto el sexto divisor es $3^2 = 9$.